

Giuseppe Ditta

RACCOLTA DI MONOGRAFIE

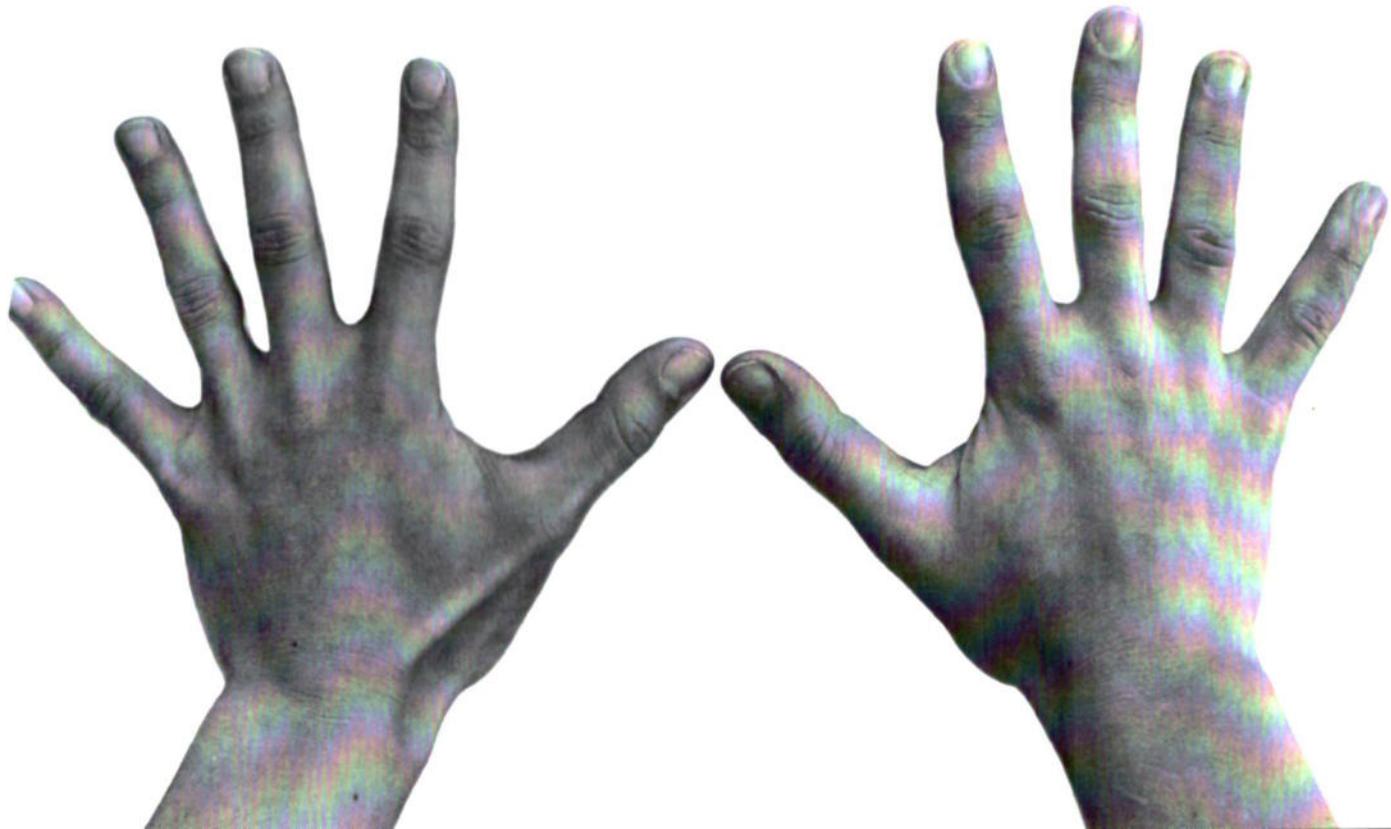
- La simmetria dal punto di vista elementare
- La simmetria dal punto di vista algebrico-analitico
 - Tesina di Geodesia
 - Teorema di Moutard



Giuseppe Ditta

RACCOLTA DI MONOGRAFIE

- La simmetria dal punto di vista elementare
- La simmetria dal punto di vista algebrico-analitico
 - Tesina di Geodesia
 - Teorema di Moutard



Presentazione

I

Nel presente libretto ho riunito quattro tesi;
nelle prime due c'è una affinità perché trattano della simmetria dal punto di vista che è mettere la prima, e, dal punto di vista algebrico-analitico la seconda.

Preciso che la prima tesi si basa sul tema assegnato dal ministero agli esami di corso a cattedre di Scuola Media.

Nella seconda tesi la simmetria viene estesa allo studio delle curve; gli esercizi che seguono nella seconda, quindici, si fanno forte della geometria analitica e dell'algebra.

Si è preferito, anche, introdurre uno studio sui fenomeni associati al fine di mettere in correlazione fra loro le caratteristiche comuni.

La terza tesi è tutta di Geosse sia.

La quarta tesi tenta del teorema di Moutard.

E' da precisare che non è stata pubblicata la dimostrazione originale di detto teorema e, chissà perché, non se ne conosce il motivo; il matematico francese ha ripubblicato in caso particolare del suo teorema.

Si sa che la dimostrazione originale del teorema è andata distrutta durante l'incedere avvenuto nell'ufficio pubblico dove era stata depositata.

Per la numero tre ho rielaborato gli appunti presi durante le lezioni.

giorni tenute dal prof. Pino, presso l'Istituto di
Matematica dell'Università di Palermo.

Indice generale II

- Tesina n.1 da pag. 1 a pag. 19
- Tesina n.2 da pag. 20 a pag. 47
- Tesina n.3 da pag. 47 a pag. 58
- Tesina n.4 da pag. 59 a pag. 64

Giuseppe Ditta

N. 1
La simmetria svolto finito
di vista
elementare

Tesina scritta in
collaborazione
con i miei alunni di
materna classe
della
Scuola Media
E. Pacelli
di
Paceco

Dedicata agli
alunni che hanno collaborato
alla stesura
della
presente
tesina

Ringraziamenti:

Al titolare della tipografia Abate Jee la
scelta dei tipi e del tipo di carta; un riu-
ngraziamento particolare alla gentilissima
Sig.ra Abate Annalisa, della tipografia omo-
nima, per aver prestato le sue reali (vede-
re stampa in cofutiva), per mostrare un esem-
pio di simmetria assiale.

Tesina n. 1

Il concetto di simmetria è di fondamentale importanza nello studio della matematica e delle osservazioni scientifiche.

Se candidato sviluppi il concetto matematico di simmetria, partendo dall'osservazione delle forme biologiche e dei cristalli e dica, in base alle proprie esperienze didattiche e a quelle sviluppate nel corso, come tale argomento possa essere introdotto nella scuola media, caratterizzandone il valore univoro.

Svolgimento

Prima che divenisse oggetto di studio da parte degli scienziati, la "simmetria" di particolari forme colpì, senza dubbio, la curiosità e la fantasia dell'uomo primitivo.

Questi aveva, ogni giorno, sotto lo sguardo, figure "simmetriche" che sicuramente gli appagavano il gusto della vista e gli infondevano, senza spiegarselo, un senso di equilibrio.

Man mano che l'uomo primitivo si andò civilizzando, di pari passo si sviluppò in lui il senso dell'osservazione ed il suo interesse ad analizzare i "campioni": in tal modo si sviluppò la tecnologia e si svilupparono i mezzi di ricerca e nuove forme simmetriche furono scoperte e create.

Nel caso generale definiremo simmetrica una figura che rimarrà invariata dopo una "trasformazione" e le trasformazioni più comuni sono:

1) la traslazione sul piano, che da la sim-

metria di traslazione (affunto sul piano) che si può osservare sulla disposizione delle foglie di una pianta su un rameo.

2) la rotazione attorno ad un asse (come la disposizione dei petali in una margherita e dei tentacoli di una medusa);

3) la riflessione su di un piano che è la simmetria bilaterale (come quella posseduta dal corpo di quasi tutti gli animali a simmetria non taggiata, dai vermi fino all'elefante).

La suddivisione di cui sopra, si presta come grossolana, utile soltanto per dare l'idea di quello che poi un processo scientifico precisebbe.

Se dala biologia poi passiamo al regno minore - rale non possiamo dire che gli esempi di simmetria difettano nei cristalli.

Per formalizzare il concetto di simmetria prenderemo in considerazione alcuni esempi:

1° Esempio

Simmetria di rotazione di
una diatomica

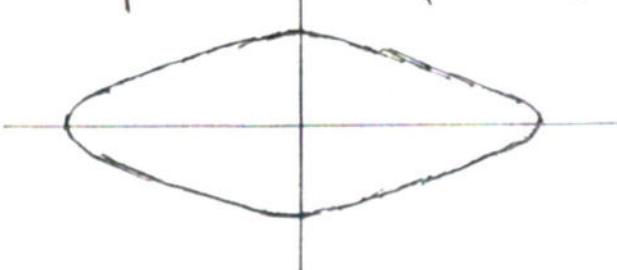
fig.1



2° Esempio

Simmetria bilaterale di una diatomea rispetto a due piani perpendicolari

fig.2



3)

Esempio di simmetria di rotazione in un fiore e in una foglia

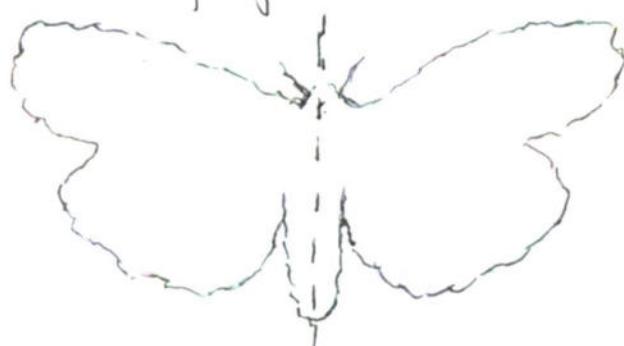
fig. 3



4)

Esempio di simmetria bilaterale in una farfalla

fig. 4



Nei cristalli, poi, vi possono essere tre diverse categorie di elementi di simmetria: assi, piani e centro.

In alcuni cristalli i tre elementi esistono, in altri mancano parzialmente o totalmente.

Un asse di simmetria è una retta, ruotando attorno alla quale, un cristallo viene a ricoprirne 2, 3, 4 o 6 volte nel giro di 360° : si hanno quindi, assi di simmetria binaria, ternaria, quaternaria e senaria.

Un piano di simmetria è un piano che divide il cristallo in due parti simmetricamente uguali; il centro di simmetria viene definito come quel punto rispetto al quale ad ogni faccia del cristallo ne corrisponde un'altra opposta, parallela e invertita.

5) Esempio di simmetria in un

cristallo di sal gemma⁴ (NaCl): cubo.

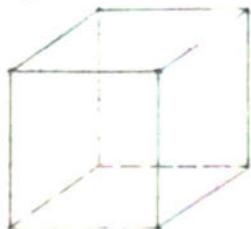


fig.5

Facciamo ora intervenire la matematica come mezzo d'indagine per studiare le diverse simmetrie presentate:

Negli esempi 1 e 3 in ciascuna figura esiste un punto (baricentro) attorno al quale è possibile farla ruotare per sovrapporla su sé stessa.

In un giro completo di 360° tale evento si verifica 3 volte e pertanto, constatato che le rotazioni (minori di 360°) hanno la stessa ampiezza, basta far ruotare la figura di $360^\circ/3 = 120^\circ$ attorno al baricentro.

Per convenzione possiamo chiamare vertici della figura i punti in cui i piani di simmetria tagliano il contorno della stessa; se sovponremo le figure piano, in tal caso, parleremo di assi di simmetria.

In questo caso, dunque, esistono tre rette rispetto alle quali la figura risulta simmetrica (simmetria assiale); tali rette passano per i vertici ed il baricentro:

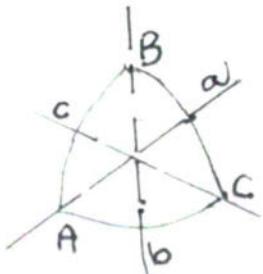


fig.1

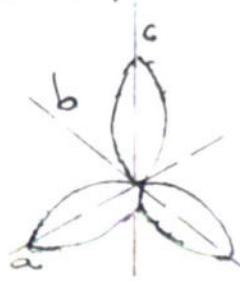
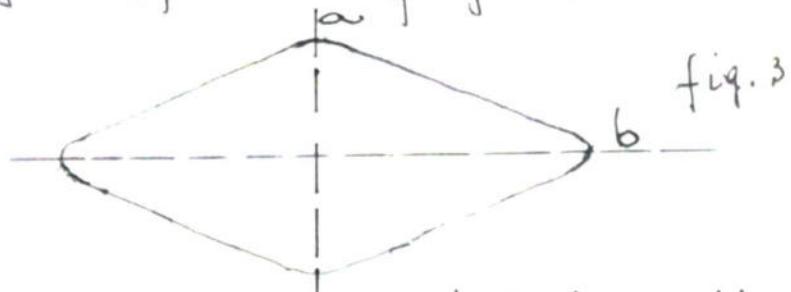


fig.2

Rispetto a tali assi le figure risultano specularmente identiche; nell'esempio n. 2 la simmetria è relativa a due assi (si ricordi di considerare piana la figura) fra loro perpendicolari.

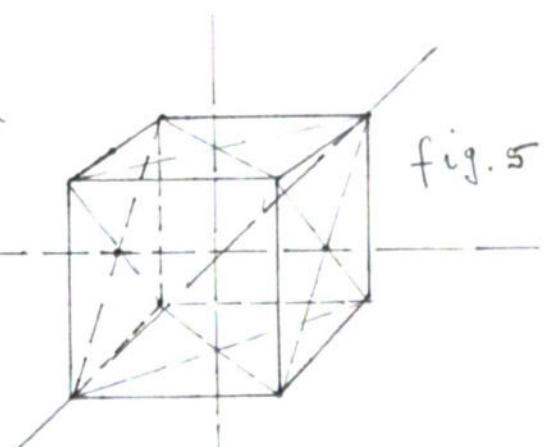


Nell'esempio n. 4 la simmetria è relativa solo a un asse (sempre considerando la figura piana), rispetto al quale metà della figura risulta specularmente uguale all'altra metà.



Nell'esempio n. 5 le cose si presentano alquanto complicate, ma procediamo con ordine:

1) Congiungendo i centri di due facce opposte osserviamo che il cubo può ruotare attorno a tale congiungente e per ogni rotazione di 90° la figura si trasforma in sé.



Poiché in un giro completo (di 360°) tale situazione si ripete $360^\circ : 90^\circ = 4$ (volte) chiameremo

ciascuna delle rette congiungenti i centri sudetti asse di simmetria quaternaria.

Il cubo ha in tutto sei facce e di tali assi ne esistono $6:2 = 3$; pertanto il cubo possiede 3 assi di simmetria quaternaria.

1) Se congiungiamo due vertici opposti di tale cubo e lo facciamo ruotare attorno a ciascuna delle suddette congiungenti, la figura si trasforma in sé tre volte (quindi ciascuno di tale asse viene chiamato ternario); poiché il cubo possiede otto vertici gli assi di simmetria ternaria risultano: $8:2 = 4$.

3) In analogamente possiamo considerare le rette che uniscono i punti di mezzo che uniscono due spigoli opposti e ruotando la figura attorno a tali rette, la figura si trasforma in sé ogni 180° ; quindi tale evento si verifica $360^\circ:180^\circ = 2$ (volte) per asse (quindi asse binario).

Gli spigoli di un cubo sono 12 e quindi le rette che uniscono i loro punti di mezzo sono $12:2 = 6$. Su conclusione un cubo possiede 6 assi di simmetria binari.

Per determinare i piani di simmetria si procede allo stesso modo, ragionando come sopra.

Introdotto il concetto "qualitativo" di simmetria, prendendo come esempi prototipi della natura, vediamo come sarà possibile introdurre in una Scuola media la questione e dedurne anche le caratteristiche.

Per il nostro scopo useremo materiale di tipo

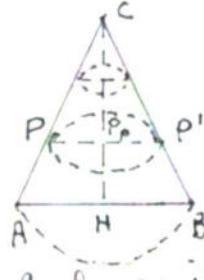
7

tuna e saranno sufficienti una riga, un compasso, un paio di forbici, una matita bicolore, una squadra, uno specchietto (piano), della carta trasparente e, se si crede opportuno, della carta carbone.

Per semplicità di esecuzione ci attiveremo alle figure piane.

Disegniamo sulla carta trasparente 5 figure: un triangolo isoscele, un triangolo equilatero, un quadrato, un cerchio e un rombo.

Tracciamo l'altezza relativa alla base del triangolo isoscele, le tre altezze del triangolo equilatero, le diagonali del rombo, anche le diagonali e le rette mediane del quadrato, alcuni diametri del cerchio.



Iniziamo dal triangolo isoscele

Per comodità indiciamo con le lettere maiuscole dell'alfabeto (A, B, C, H) rispettivamente i vertici del triangolo e il punto medio della base AB .

Pieghiamo il triangolo (il foglio sul quale è stato disegnato), lungo l'altezza CH e facciamo osservare agli alunni che è possibile sovrapporre, con una rotazione di 180° attorno a CH , la parte ACH (metà) del triangolo dato, su CHB ; facciamo pure osservare che basta disporre lo specchietto sulla CH , perpendicolarmente al piano della figura, in modo che la parte speculare sia rivolta dalla parte del triangolo CAH .

Il segmento CH non si potrà sottrarre dallo specchio (in quanto si riflette su sé stesso) mentre il segmento AC si rifletterà su AB e il segmento AB su HB ; diremo agli a = lunghi che il triangolo CHB si può costruire semplicemente senza eseguire la rotazione di 180° fuori dal piano, del triangolo CAH .

Infatti:

- a) tutti i punti dell'asse di rotazione CH , durante tale rotazione, restano fermi;
- b) il segmento AB resta perpendicolare a CH , durante tale rotazione, resta fermo;
- c) il segmento AB resta perpendicolare a CH in modo che $AH = HB$.
- d) che $AH = HB$ era noto dal fatto che CH era altezza del triangolo dato e dunque H è il punto medio di AB ; altra giustificazione sarà data in riferimento alla rotazione eseguita in quanto $AH = HB$ raggi della stessa circonferenza.

Con ciò basterebbe partire dalla figura CAH per arrivare alla figura simmetrica CHB , nel seguente modo:

sia CAH un triangolo rettangolo in H (si ricordi che $CH \perp AB$) e conduciamo per ogni punto P di AC la perpendicolare a CH ; indiciamo con P_0 il piede di tale perpendicolare su CH e prendiamo su tale retta, da parte opposta a CH rispetto ad AC , un punto P' tale che si abbia $P_0P = PP_0$.

Procedendo in tal senso possiamo escludere tutto il segmento CB simmetrico di AC rispetto a CH .

Se chiamiamo corrispondenti i punti come P, P' possiamo concludere che nella simmetria assiale:

- I) I punti corrispondenti stanno su una retta perpendicolare all'asse di simmetria;
- II) Se segmento che congiunge punti corrispondenti viene bisezionato dall'asse di simmetria;
- III) I punti dell'asse di simmetria hanno per corrispondenti loro stessi;
- IV) Figure simmetriche sono uguali a meno di rotazioni.

Facciamo osservare, procedendo nel modo dianzi esposto, che l'operazione di trasformazione si può eseguire anche sul rombo tenendo conto che una diagonale qualsiasi di vede il rombo in due triangoli isosceli.

La stessa osservazione sul triangolo equilatero porta a concludere che tale triangolo possiede tre assi di simmetria: le sue mediane.

Il quadrato, da parte sua, possiede quattro assi di simmetria e cioè: le due rette mediane e le due diagonali.

Per quanto riguarda il cerchio possiamo affermare che possiede infiniti assi di simmetria: tutti i diametri.

Infatti: piegando i due semicerchi che

si ottengono, tracciando un diametro qualsiasi, si, in modo da farli ruotare di 180° essi coincidano perfettamente.

Se punto medio del diametro si chiamerà centro di simmetria e la simmetria si dice centrale.

Tutte le piegheature che si possono eseguire attorno a un diametro passano per il centro; se vogliamo individuare il corrispondente P' di un qualsiasi punto P della circonferenza, basta unire P col centro di simmetria e la dove tale congiungente interseca la circonferenza si trova P' .

Ovviamente, se incidiiamo con O il centro della simmetria, per quello che è stato detto in precedenza sui punti simmetrici di una figura, si ha:

$$OP = OP' = r \quad (\text{raggio della circonferenza})$$

Possiamo affermare che in una simmetria centrale risulta che:

- 1) Punti corrispondenti sono equidistanti dal centro di simmetria;
- 2) Punti corrispondenti sono allineati col centro.

Non disdegnerà l'insegnante, a questo punto, di far costruire agli stessi almeno uno strumento che attraverso il gioco possa far provare il gusto della scoperta; consigli, infatti, di costruire (O , nella impossibilità, di rifareci).

un calidoscopio; faccia anche tagliuzzare del la carta piegata e farci osservare le caratteristiche delle figure ottenute spiegando la carta.

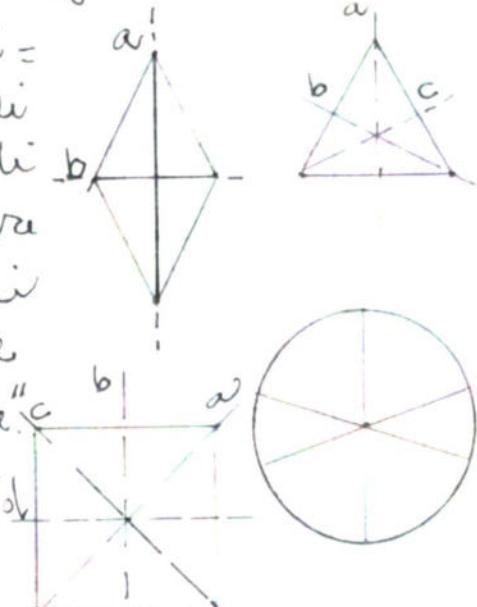
Some degli esempi basali ma molto efficaci!

Per concludere, proponga, l'insegnante, la costruzione di figure simmetriche e faccia rilevare che le trasformazioni per simmetria assiale e centrale non le deformano (ossia la figura, dopo la trasformazione rimane eguale a se stessa) e che pertanto le simmetrie si possono includere in quel gruppo di trasformazioni geometriche dette trasformazioni isometriche.

"Riporto qui a fianco le figure geometriche sulle quali sono stati condotti gli studi precedenti per poi continuare sui suggerimenti agli alunni perché fissino bene il concetto di simmetria."

Se ora si utilizza carta trasparente e si fa ricalcare, agli alunni, una figura preventivamente disegnata, su una faccia del foglio, opportunamente piegato, si può chiedere loro sotto quali condizioni, ogni figura ottenuta dal ricalco di un'altra, possa considerarsi simmetrica di quella.

Potrebbe l'insegnante suggerire l'orientamento degli assi di simmetria e far com-



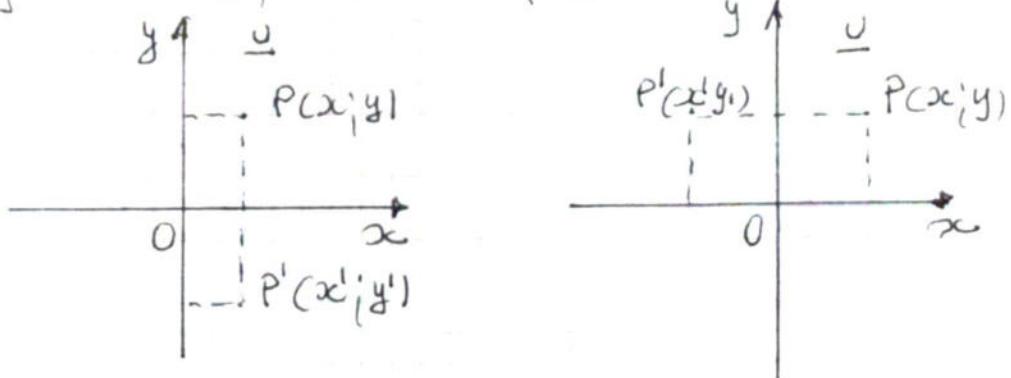
bilare, di volta in volta, una tabella di composizione; non dovrebbe essere difficile far dedurre che il prodotto di due simmetrie dello stesso tipo è una simmetria dello stesso tipo e che il prodotto di due simmetrie rispetto ad assi incidenti ma non perpendicolari non è una simmetria ma una rotazione.

Cominciamo con l'esporre i risultati suddetti, utilizzando carta millimetrata trasparente, ricavando, prima di tutto, le quagioni dei due tipi di simmetria.*

Simmetrica assiale

Studiamo sul piano (un foglio di carta miliimettrata trasparente) un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (assi) e, come di consueto, chiamiamoli x ed y rispettivamente; sia O la loro origine.

Non dimentichiamo di muovere gli assi di verso e sia $P(x; y)$ un punto, supponiamo sul primo quadrante, e pieghiamo la carta una volta lungo l'asse x ed una volta lungo l'asse y , come in figura:



*Ovviamente quanto esposto vale finché conosce la geometria analitica.

Si immediatamente si deducono, per il simmetrico di P le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

che costituiscono una rappresentazione analitica della simmetria rispetto all'asse x
e

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

che costituiscono una rappresentazione analitica della simmetria rispetto all'asse y .

Simmetria centrale.

Le operazioni eseguite prima per ottenere le equazioni della simmetria assiale di due punti $P(x; y)$ e $P'(x'; y')$ si possono eseguire successivamente per determinare le equazioni di due punti $P(x; y)$ e $P'(x'; y')$ in simmetria centrale.

Indichiamo con P_x il piede della perpendicolare condotta da P all'asse x e con P_y il piede della perpendicolare all'asse y condotta dal punto Q simmetrico di P rispetto all'asse x ; indichiamo con P' il simmetrico di Q rispetto all'asse y ; mostriamo che P' è il simmetrico di P nella simmetria centrale di centro O .

Infatti:

i triangoli POP_x e OP_yP' sono uguali e in particolare è $P \hat{\cdot} \hat{O} P = P_0 \hat{\cdot} \hat{O} P'$ avendo indicato con P_0 la proiezione (ortogonale) di P su y ; i tali angoli sono uguali e sono anche opposti al

vertice con un lato (y) in comune.

Concludiamo che i punti P' , O , P sono allineati e per l'uguaglianza dei triangoli disegni menzionati è anche $OP' = OP$; i punti P, P' pertanto risultano simmetrici rispetto al punto O .

Per la determinazione della simmetria centrale che porta P in P' , dunque, si ha:

Q , quale simmetrico di P rispetto all'asse y , ha coordinate $x, -y$ mentre P' , quale simmetrico di Q rispetto all'asse y , ha coordinate $-x, -y$.

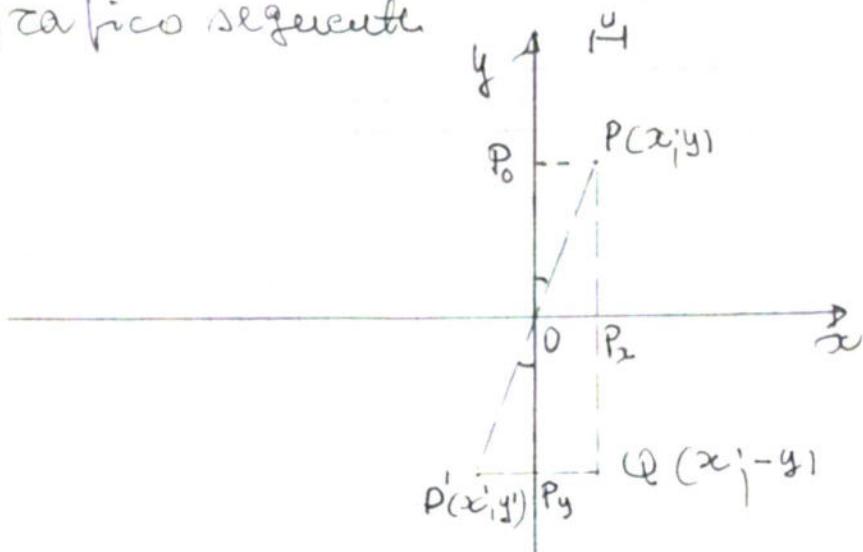
Le coordinate di P' pertanto sono:

$P'(-x, -y)$ ossia

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Tali equazioni costituiscono, perciò, una rappresentazione analitica della simmetria centrale su P e P' rispetto ad O .

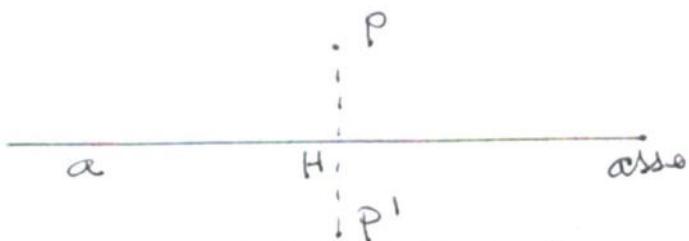
Quanto detto sopra si può seguire sul grafico seguente



Composizione di simmetrie

Abbiamo visto in precedenza come costruire una simmetria sia assiale che centrale; infine abbiamo costruito il prodotto di due simmetrie assiali il cui risultato è stato una simmetria centrale.

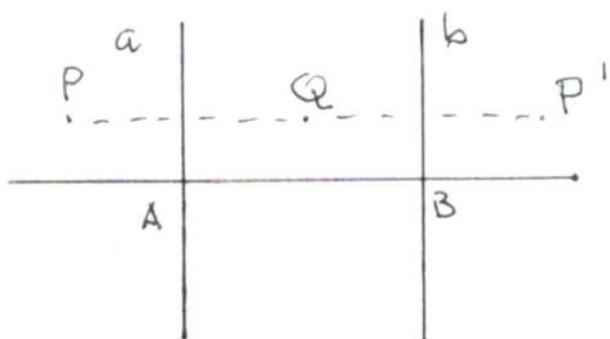
Prodotto di due simmetrie assiali rispetto allo stesso asse.



Se P' è il simmetrico di P rispetto all'asse a il simmetrico di P' , rispetto alla stessa asse a è il punto P .

In tal caso si dice che la simmetria è identica.

Prodotto di due simmetrie assiali i cui assi sono paralleli



Sia $a \parallel b$ e P un punto qualsiasi del piano su cui giacciono gli assi a e b ; P un punto esterno rispetto alle strisce di piano comprese fra a e b .

Il simmetrico di P rispetto all'asse a è Q e il simmetrico di Q rispetto all'asse b è P' .

se $b \neq P'$; si osserva immediatamente che la trasformazione che porta P in P' non è una simmetria ma una traslazione. Determiniamo l'ampiezza di tale traslazione.

Dalla figura precedente possiamo scrivere:

$$\overline{PP'} = \overline{PQ} + \overline{QP'} = 2\overline{AQ} + 2\overline{QB} = 2(\overline{AQ} + \overline{QB})$$

quindi:

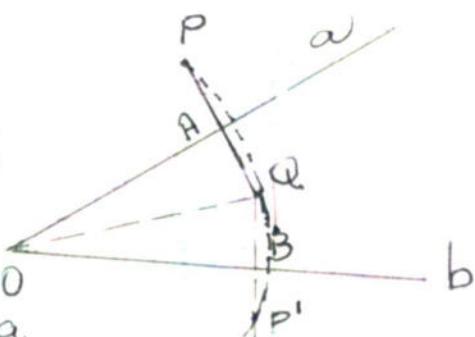
$$\overline{PP'} = 2(\overline{AQ} + \overline{QB}) = 2\overline{AB}.$$

L'ampiezza della traslazione è, quindi il doppio della distanza fra gli assi di simmetria.

Si può mostrare che l'operazione non è commutativa

Composizione di due simmetrie rispetto ad assi incidenti ma non perpendicolari

Siano a, b due rette incidenti in O , ma non perpendicolari; P un punto esterno all'angolo acuto $\angle AOB$ formato da esse formato; sia Q il simmetrico di P rispetto ad a e P' il simmetrico di Q rispetto a b .



Il punto O sta sull'asse del segmento rispettivamente di PQ e di QP' ; pertanto O è il centro della circonferenza passante per P, Q, P' .

Si noti che sono uguali gli angoli $\hat{P}OA$ e $A\hat{O}Q$, $\hat{Q}OB$ e $B\hat{O}P$. pertanto possiamo determinare l'angolo:

$$\hat{P}OP_1 = \hat{P}OA + \hat{Q}OB = 2\hat{A}OA + 2\hat{Q}OB = 2(\hat{A}OA + \hat{Q}OB) = 2\hat{AOB}.$$

Concludiamo che il prodotto di due simmetrie rispetto ad assi incidenti non perpendicolari è una rotazione di ampiezza pari al doppio dell'angolo formato dagli assi di simmetria e di raggio pari alla distanza del punto P dal punto comune agli assi di simmetria.

Anche in questo caso si può mostrare che il prodotto non è commutativo.

N.B.

Nel caso particolare in cui gli assi fossero perpendicolari, il prodotto di due simmetrie è ancora una rotazione di ampiezza, naturalmente di 180° ; tale rotazione si può considerare una simmetria centrale.

Considerazioni

Come abbiamo osservato la composizione di due simmetrie (esclusa l'identità) non è legge bimaria perché il prodotto di due simmetrie è uguale ad una rotazione o ad una traslazione; si può parlare di operazione intera qualora si considerassero in un unico insieme le rotazioni e le simmetrie rispetto ad assi concorrenti; in tal caso si perviene alla struttura di gruppo.

Dall'analisi, di casi particolari, delle proprietà delle operazioni si può pervenire alla astrattizzazione dei risultati, valevoli in

qualunque insieme considerato e prescindere dalla qualità degli elementi; l'importanza di quanto dedotto da casi particolari sta nella generalizzazione e nella unificazione concettuale.

Tuttati, le proprietà di tali concetti astratti, studiate in generale, si possono applicare a casi concreti.

Se non possiamo qui parlare di struttura logica che la simmetria può mettere in luce (infatti la legge di composizione non è costante in qualunque caso), non possiamo tacere quali contributi il concetto di simmetria, ha portato all'arte e in particolare alle Scienze.

Per quanto riguarda l'arte non vi sono composizioni senza simmetria ma ci permettiamo di sottolineare soltanto qualche contributo della simmetria nel campo delle Scienze.

Fra queste la Fisica, fra le discipline sperimentali, la più vicina alla matematica, ha subito enormemente il fascino delle leggi della simmetria e non poche sono state le scoperte, che ad esse devono l'estensione, quali:

- 1) d'equilibrio dei piatti di una bilancia
(simmetria bilaterale)
- 2) da spinta idrostatica (scoperta da Archimede), bilanciante il peso del liquido spostato da un corpo in esso immerso.

- 3) L'equilibrio tra le forze vincolanti e le forze d'inerzia
- 4) La materia contrapposta all'antimateria (protone positivo con protone negativo, elettrone negativo con elettrone positivo)

E' doveroso

portare a conoscenza del lettore che la presente tesi ha è stata da me "costruita" (ma poco rimaneggiata) sulla base dei diversi contributi, frutto di ricerche personali, fatti affluire da alenii miei di materna classe di Scuola Media.

Ho svolto, pertanto, funzione di "tutor" e "correttore" di bozze.

Tesi n. 2:
 di trasformazioni geometriche
 (per via algebrica e analitica)

1) Premessa

Se si leggono i testi dei temi di matematica, proposti dal Ministero per la Maturità Scientifica dal 1970 in poi, si nota che vengono richiesti pochissime volte, e, poco "curati" nei libri di testo:

1) Le trasformazioni geometriche

2) Studio di funzioni associate ad una funzione data.

Nella tesi che segue, secca avere la pretensione di voler trattare l'argomento in forma esauritiva, mi limiterò ai casi di simmetria rispetto a un punto, rispetto a una retta e a un solo caso di affinità omologica (dilatazione); quanto sopra riguardo il primo punto.

Per il secondo punto, studiata una funzione $y = f(x)$, si prenderanno in considerazione comparativa le funzioni:

$y = f(x)^{-1}$, $y = |f(x)|$, $y = \log |f(x)|$, $y = e^{f(x)}$.
 Con ciò si pensa di fare cosa gradita agli alunni interessati e ai colleghi ai quali l'iniziativa vuole soltanto operare a loro una riduzione di tempo.

Per chiarire meglio l'azione secondo cui il primo punto opera desidero trattare l'argomento:

2) Trasformazioni del piano in sé stesso.
 Consideriamo una trasformazione T

(traslazione e/o rotazione) tale che a un punto P di un piano cartesiano sia possibile far corrispondere un punto (e uno solo) P' dello stesso piano; se il punto P' si può considerare nello stesso trasformazione T , quale corrispondente del solo punto P , allora i punti P e P' si dicono in corrispondenza finiva e la trasformazione T si dice "trasformazione del piano in se stesso."

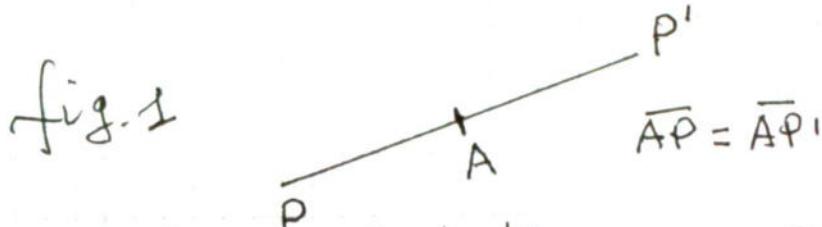
Alla trasformazione T^{-1} che applicata al punto P' porta al punto P si dà il nome di trasformazione inversa (di T).

Ai punti che hanno come trasformati loro stessi se attribuisce il nome di "punti eluti".

3) Definizione di simmetria sul piano.

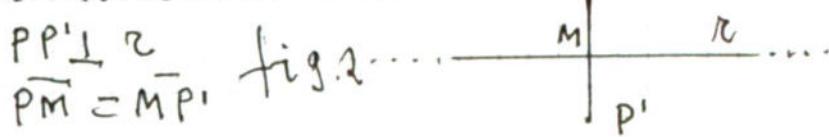
a) Simmetria rispetto a un punto A

Due punti P e P' si dicono simmetrici rispetto al punto A se dallo punto divide il segmento PP' in parti uguali



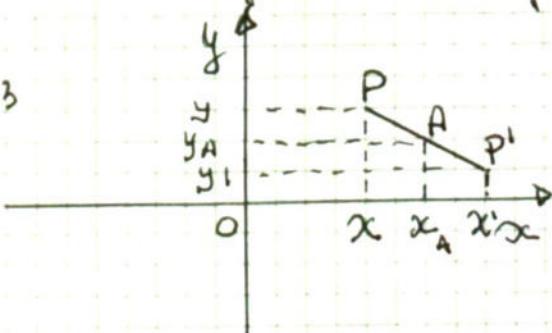
b) Simmetria rispetto a una retta r

Se dati due punti P, P' ed r una retta tale che risulta perpendicolare nel punto M medie del segmento PP' allora si dice che P, P' sono simmetrici rispetto alla retta r che si chiede asse di simmetria.



- 4) Le simmetrie in un riferimento cartesiano
 I) Simmetria rispetto a un punto A

fig. 3



sia xoy un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e A il punto medio di un segmento di estremi $P(x, y)$ e $P'(x', y')$

sia $A(x_A, y_A)$ e dato che $\overline{PA} = \overline{AP'}$, risulta $x_A = \frac{1}{2}(x+x')$, $y_A = \frac{1}{2}(y+y')$. (*)

Un esempio (di carattere teorico)

Sia C una curva di equazione $y = f(x)$ [$f(x, y) = 0$] e determiniamo l'equazione della sua simmetrica C' rispetto ad $A(x_A, y_A)$.

Se in tale trasformazione $P \rightarrow P'$, l'equazione della curva C' simmetrica rispetto ad A sarà:

$$y' = f(x') \quad [f(x', y') = 0]$$

Ricaviamo x' , y' dalle (*) e ottiene:

$$x' = 2x_A - x, \quad y' = 2y_A - y$$

e sostituendo nell'equazione della curva C si ottiene:

$$\begin{aligned} 2y_A - y &= f(2x_A - x) \\ [f(2x_A - x); (2y_A - y)] &\approx 0 \end{aligned}$$

Infine si faccia attenzione a come si può praticare su una curva

Esempio pratico.

Sia data la parabola C di equazione $y = x^2 - 2x - 3$; scrivere l'equazione della sua simmetrica C' rispetto al punto $A(3; 2)$.

Svolgimento.

Ricordiamo che in tale simmetria il punto $P(x; y)$ ha per corrispondente il punto $P'(x'; y')$ tali che:

$x' = 2x_0 - x$, $y' = 2y_0 - y$ e sostituendo
di $x_0 = 3$ e $y_0 = 2$ le precedenti diventano
 $x' = 6 - x$, $y' = 4 - y$
da cui si possono ricavare:

re:

$x = 6 - x'$, $y = 4 - y'$
che sostituiti nella $y = x^2 - 2x - 3$.

Sostituendo tali coordinate nell'equazione della C otteniamo:

$$4 - y' = (6 - x')^2 - 2(6 - x') - 3$$

e sviluppando, infine si ha:

$$y' = -x'^2 + 10x' - 17$$

e se si preferiscono le coordinate usuali abbiamo:

$$y = -x^2 + 10x - 17.$$

Rappresentiamo i due grafici

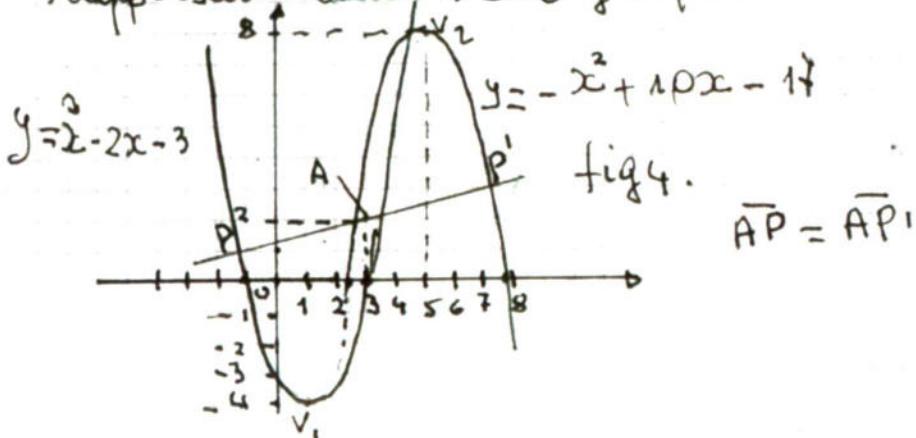


fig. 4.

$$\overline{AP} = \overline{AP'}$$

In particolare una curva risulta simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani se la sua equazione rimane inmutata cambiando x con $-x$ e y con $-y$.

Il Simmetria rispetto all'asse x .

La simmetria rispetto all'asse x può essere interpretata come quella trasformazione geometrica che porta il punto

P nel punto P' ove la retta figura PP' è parallela all'asse y e $PH = P'H$ con H l'intersezione del segmento PP' con l'as-

se x .

Poiché $P(x; y) \rightarrow P'(x'; y')$, la loro relazione, pertante trasformazione, può essere espressa da:

$$x = x', y = -y'$$

Pertanto se $y = f(x)$ [$f(x; y) = 0$] è l'equazione di una curva C , l'equazione della sua simmetrica C' sarà:

$$\text{Esempio. } -y = f(x) \quad [f(x; -y) = 0]$$

Scrivere l'equazione della curva C' simmetrica della curva C di equazione

$$y = x^2 - 2x - 3$$

rispetto all'asse x

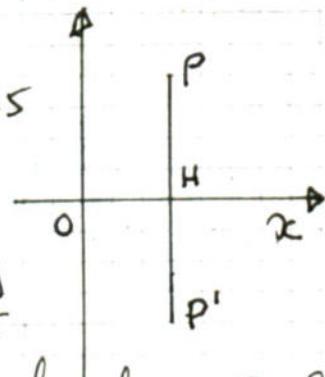
Poiché le equazioni della trasformazione richiesta sono:

$$x = x', y' = -y$$

l'equazione richiesta sarà:

$$y' = x'^2 - 2x' - 3$$

e sostituendo:



Rappresentiamo le due curve C e C' (parabole) su uno stesso piano cartesiano:

 C

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \quad \frac{\Delta}{4} = 4$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=-1, x=3 \end{cases}$$

$V_C(1; -4)$

 C'

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \quad \frac{\Delta}{4} = 4$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=-1, x=3 \end{cases}$$

$V_{C'}(1; 4)$

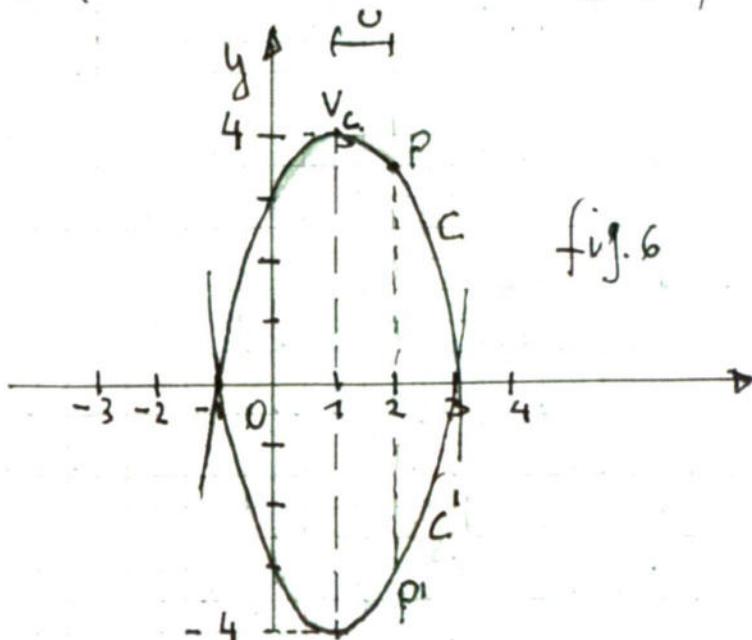
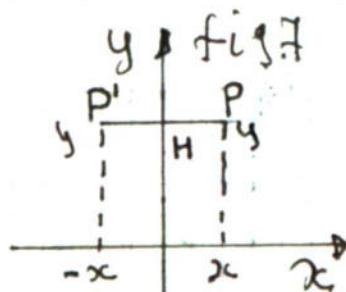


fig. 6

III Simmetria rispetto all'asse delle ordinate.

Consideriamo un sistema xoy di assi cartesiane cartesiane (ortogonali); per P, P' due punti P, P' , risultano simmetrici rispetto all'asse y è necessario e sufficiente che l'asse y sia asse del segmento PP' .



mentale corrispondenza risulta:

$$\text{ppi } \perp y, P_H = \overline{P_H}$$

per cui si rileva che

$$\text{se } P(x; y) \rightarrow (x'; y')$$

dove essere:

$$y' = y, x' = -x$$

Se $y = f(x)$ [$f(x; y) = 0$] è l'equazione di una curva C , l'equazione della curva C' , simmetrica di C rispetto all'asse y , sarà:

$$y' = f(x') [f(x'; y') = 0]$$

ove $y' = y$ e $x' = -x$ quindi l'equazione richiesta sarà:

$$y = f(-x) [f(-x'; y) = 0]$$

Esempio:

Scrivere l'equazione della curva C' simmetrica, rispetto all'asse y , della curva C di equazione:

$y = -x^2 + 3x - 2$; quanto detto prima
ma deve essere:

$$y' = -x'^2 + 3x' - 2 \quad \text{ove } y' = y \\ \text{e } x' = -x. \quad \text{e quindi } y = -x^2 - 3x - 2$$

Tracciamo i grafici delle due curve:

C

$$y = -x^2 + 3x - 2$$

$$x=0, y=-2 \quad \Delta=1$$

$$\begin{cases} y=0; x=1, x=2 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$V_C\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$$

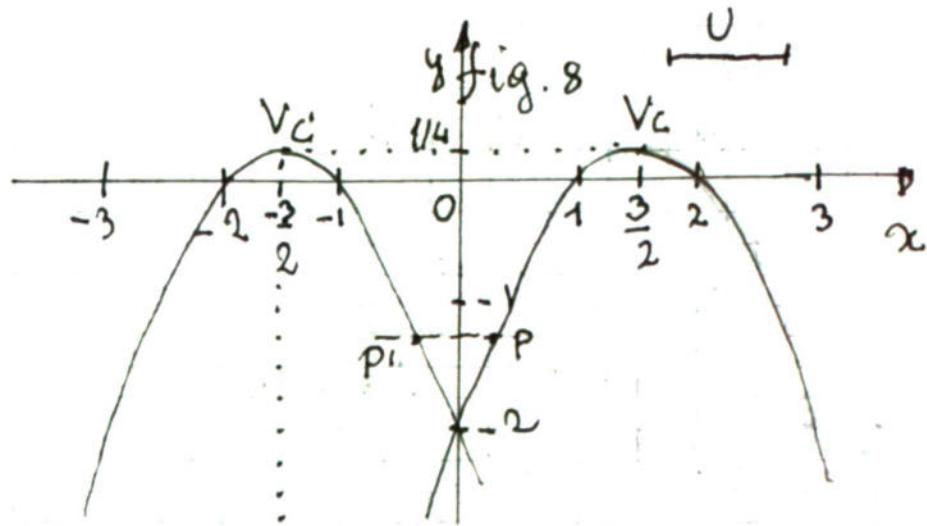
C'

$$y = -x^2 - 3x - 2$$

$$x=0, y=-2, \Delta=1$$

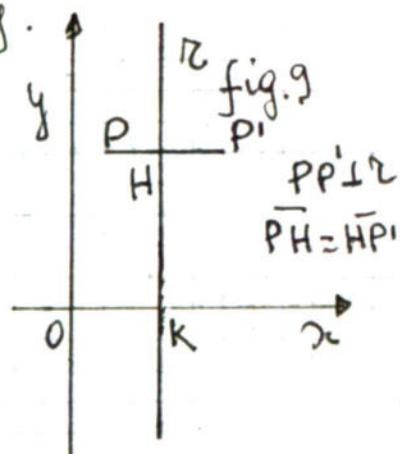
$$\begin{cases} y=0; x=-2, x=-1 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$V_{C'}\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$$



IV Simmetria rispetto a una retta parallela all'asse y.

Osserviamo che se $x = k$ è l'equazione di una retta parallela all'asse y e $P(x; y)$ la simmetria che porta tale punto in $P'(x'; y')$ (simmetria di P rispetto alla retta r di equazione $x = k$) è caratterizzata dalle equazioni:



Perciò se $y = f(x)$ [$f(x; y) = 0$] è l'equazione di una curva C e $y' = f(x')$ è l'equazione della curva C' , sua simmetrica rispetto alla retta $x = k$, possiamo scrivere la $y' = f(x')$ nella forma seguente:

$$y = f(2k - x) \quad [f(2k - x), y = 0]$$

Esempio:

Scrivere l'equazione della curva C' simmetrica rispetto alla retta $x = 1$ della

28

C di equazione $y = x^3$.

Svolgimento.

All'uso poniamo $y = y'$ e $x' = 2 - x$ e $y' = x'^3$
la trasformata di C; operiamo la sostituzione e otteriamo:

$$y = (2-x)^3$$

Rappresentiamo entrambe le curve C, C':

$$\begin{matrix} C \\ y = x^3 \end{matrix}$$

$$x = y = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y' = 3x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$y' = 0 \quad \text{per } x = 0$$

$$y'' = 6x \geq 0 \quad \text{per } x \geq 0$$

$$\begin{matrix} C' \\ y = (2-x)^3 \end{matrix}$$

$$x = 0, y = 8$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = 2 \quad (\text{tripla})$$

$$y' = -3(2-x)^2 \leq 0 \quad \forall x \neq 0$$

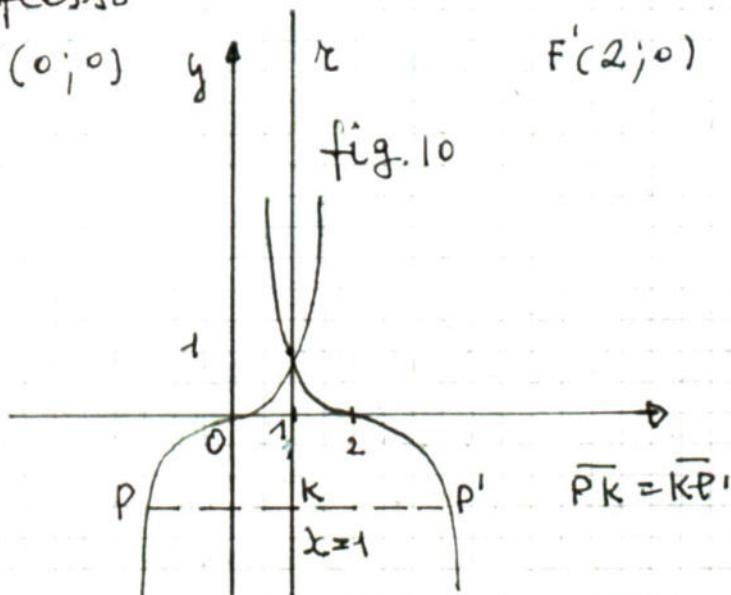
$$y' = 0 \quad \text{per } x = 2$$

$$y'' = 6(2-x) \geq 0 \quad \text{per } x \leq 2$$

Le curve non possiedono estremanti ma un flesso:

$$F(0;0) \quad y \quad F'(2;0)$$

fig. 10



V. Simmetria rispetto a una retta parallela all'asse x.

Osserviamo che se $P(x; y)$ è un punto del piano e $y = k$ l'equazione di una retta parallela all'asse x , la simmetria

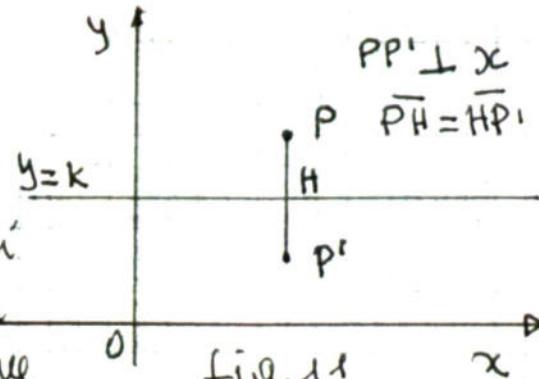


fig. 11

che trasforma il punto P nel punto P' simmetrico di P rispetto alla retta $y = k$ ha le seguenti equazioni:

$$x = x', \quad \frac{y+y'}{2} = k$$

Tale simmetria trasforma la curva C di equazione $y = f(x)$ [$f(x; y) = 0$] nella curva C' di equazione $y' = f(x')$ [$f(x'; y') = 0$]; se dalle equazioni sedette ricaviamo $x' = x, y' = 2k - y$ e sostituiamo nell'equazione della C troviamo:

$$y = 2k - f(x) \quad [f(x; 2k - y) = 0].$$

Esempio

Scegliere l'equazione della curva C' simmetrica della curva C di equazione $y = -x^2 + 2x$ rispetto alla retta $y = 1$.

Svolgimento

Se al punto $P(x; y)$ in tale simmetria corrisponde il punto $P'(x'; y')$, alla curva C di equazione $y = -x^2 + 2x$ corrisponde la curva C' di equazione: $y' = -x'^2 + 2x'$.

E poiché $k = 1$ le equazioni della trasformata C' saranno:

$$x' = x, \quad y' = 2 - y$$

e sostituendo nella $y' = -x'^2 + 2x'$

otteniamo:

$$2-y = -x^2 + 2x \quad \text{onde} \\ y = x^2 - 2x + 2.$$

Rappresentiamo le due curve:

C

$$y = -x^2 + 2x$$

C'

$$y = x^2 - 2x + 2$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} ; \begin{cases} y=0 \\ x=0; x=2 \end{cases}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = 1$$

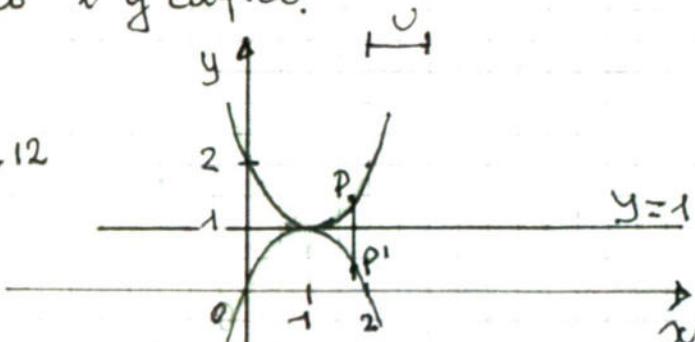
$$y_v = 1 \quad V_C(1; 1)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2; \frac{\Delta}{4} = 1-2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_v = 1 \\ y_v = 1 \end{cases} \quad V_{C'}(1; 1)$$

e perciò i grafici:

fig. 12

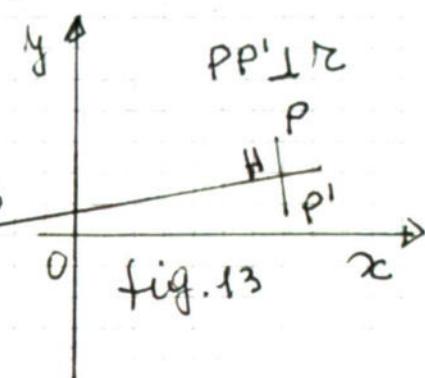


VI Simmetria rispetto a una retta generica.
(quindi non parallela agli assi cartesiani
e non passante per l'origine).

Osserviamo che se $P(x; y)$ è un punto del piano e $P'(x'; y')$ il suo simmetrico rispetto alla retta r di equazione $y = mx + n$, fra i punti P e P' intercedono le relazioni:

$PP' \perp r$, $\overline{PH} = \overline{P'H}$ con H la intersezione $PP' \cap r$.

Per trovare le relazioni fra le coordinate di $P(x; y)$ e $P'(x'; y')$ seguiamo il seguente proce-



dimento:

Siano $P(a; b)$ e $P'(a'; b')$ i punti simmetrici rispetto a r ; il punto di intersezione fra PP' ed r

d'equazione della retta PP' perpendicolare a r risulta:

$$y - b = -\frac{1}{m}(x - a).$$

Determiniamo le coordinate di H :

$$\begin{cases} y - b = -\frac{1}{m}(x - a) \\ y = mx + n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - b = -\frac{1}{m}(x - a) \\ y = mx + n \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$x_H = \frac{bm + a - mn}{m^2 + 1}$$

$$y_H = \frac{bm^2 + am + n}{m^2 + 1}$$

Psiché $P'(a'; b')$ è considerato che H è il punto medio di PP' , basta porre:

$$\begin{cases} \frac{a+a'}{2} = \frac{bm - mn + a}{m^2 + 1} \\ \frac{b+b'}{2} = \frac{bm^2 + am + n}{m^2 + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a+a'}{2} = \frac{bm - mn + a}{m^2 + 1} \\ \frac{b+b'}{2} = \frac{bm^2 + am + n}{m^2 + 1} \end{cases}$$

e risolvendo rispetto ad a', b' , ottiene:

$$a' = \frac{a - m(am + 2m - 2b)}{m^2 + 1}$$

$$b' = \frac{bm^2 + 2am + 2n - b}{m^2 + 1}$$

Tornando alle variabili ordinarie poniamo $a = x$, $b = y$, $a' = x'$, $b' = y'$ e quindi le formule di trasformazione diventano:

$$(*) \quad x' = \frac{x - (mx + 2m - 2y)m}{m^2 + 1}; \quad y' = \frac{m^2 y + 2m x + 2n - y}{m^2 + 1}$$

Concludiamo che:

se $y = f(x)$ [$f(x,y) = 0$] è l'equazione di una curva C , si può ottenere l'equazione della curva C' , simmetrica di C rispetto alla retta r di equazione $y = mx + n$, scrivendo
 $y' = f(x')$ [$f(x';y') = 0$]
ove x', y' sono date dalle (*).

In particolare l'equazione di una curva C' è simmetrica, rispetto alla prima bisettrice (1° e 3° quadrante), di una curva C di equazione $y = f(x)$ è $y' = f(x')$ ove:

$$x' = y, \quad y' = x, \quad n = 0.$$

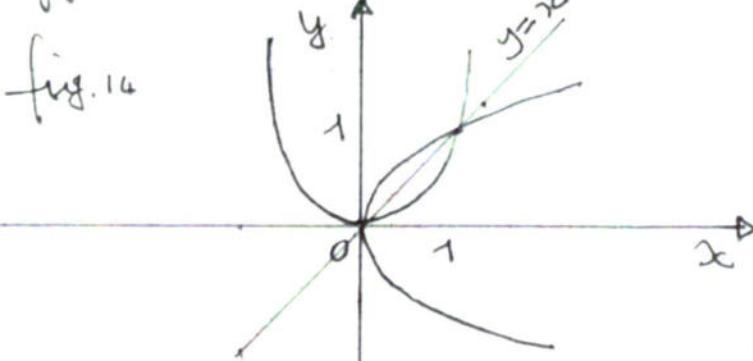
Esempio:

Determinare l'equazione di una curva C' simmetrica della curva C di equazione $y = x^2$, rispetto alla prima bisettrice.

Se operiamo lo scambio
 $x \rightarrow y, \quad y \rightarrow x$ ottieniamo:

$$y^2 = x$$

Rappresentiamo le due curve C e C'



VII Dilatazione e riduzione (affinità)

Una trasformazione geometrica tale che porta il punto $P(x;y)$ di una curva C in un punto P' di una curva C' in modo tale che:

$$x = kx' \\ y = h \cdot y'$$

o viceversa

1)

$$x' = \frac{1}{k} x$$

$$y' = \frac{1}{h} y$$

Se tale corrispondenza fa trasformare la C' di una curva C di equazione $y = f(x)$, ovvero $[f(x; y) = 0]$, sarà $y' = f(x')$ ovvero $[f(x'; y') = 0]$; sostituendo i valori delle 1) abbiamo:

$$y = h\left(\frac{x}{k}\right) \text{ ovvero } f\left(\frac{x}{k}; \frac{y}{h}\right) = 0$$

Esempio

Sia data la curva C di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{ellisse})$$

ed effettuiamo la trasformazione

$$x' = \frac{a}{r} x$$

$$y' = \frac{b}{r} y$$

la trasformata $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ diventa

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{r} x\right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{b}{r} y\right)^2 = 1$$

e riducendo:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{circonferenza})$$

d'ellisse e la circonferenza sono curve affini.

Le 1) rappresentano una riduzione se $k > 1$ e un ingrandimento se $k < 1$; ovviamente la trasformazione è nulla se $k = 1$.

VIII

Considerazioni

Quanto esposto rappresenta l'argomento da me presentato in due lezioni in una classe del Dices Scientifico V. Fardella di Crotone.

Il contenuto non vuole essere esauritivo ma appena sufficiente per affrontare le richieste che talvolta vengono avanzate in problemi di Matematica di 5^a classe.

Proprio perché ho considerato quanto esposto argomenti più richiesti in 5^a classe ho ritenuto opportuno di esporre argomenti che trattano lo studio di funzioni correlate fra loro.

Allora mi propongo di studiare funzioni correlate fra loro.

Infatti è capitato che studiata una funzione si chiede la rappresentazione di altra funzione deducibile dalla prima.

Allora mi propongo di studiare funzioni del tipo (leggasi brevemente a pag 37) :

$$y = f(x)^{-1}, \quad y = \{f(x)\}, \quad y = \log x, \quad y = |\log x|$$

$y = e^{f(x)}$, $y = f(x) \times g(x)$ con $f(x)$ e $g(x)$ funzioni già studiate.

La funzione tipo che sarà presa come "base" per studiarne (rappresentarne altre) è la seguente:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

1)

Svolgimento

Il dominio $D(x)$ della funzione data è
 $D(x) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 1\}$; il grafico passa per l'origine degli assi e poiché per $y \geq 0$ si ottiene
 $x^2 = 0$ sol. triplo significa che l'origine è un punto di passo con tangente l'asse x .
 Si cercano degli asintoti:

$$x = -1, x = 1, y = x$$

Studio del segno della funzione:

$$y > 0 \text{ per } -1 < x < 0, x > 1$$

$$y < 0 \text{ per } -1 > x, 0 < x < 1$$

Cercare degli estremanti:

$$y' = \frac{2x - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(2x - 3)}{(x^2 - 1)^2} \text{ e pertanto sarà:}$$

$$y' > 0 \text{ per } x < -\sqrt{3}, y > \sqrt{3}$$

$$y' = 0 \text{ per } x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$$

$$y' < 0 \text{ per } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

La funzione, pertanto, presenta un massimo relativo M per $x = -\sqrt{3}$, un minimo relativo m per $x = \sqrt{3}$ e un flesso F per $x = 0$ le cui coordinate sono:

$$y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, y(0) = 0 \text{ e perciò:}$$

$$M(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}), F(0, 0), m(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}).$$

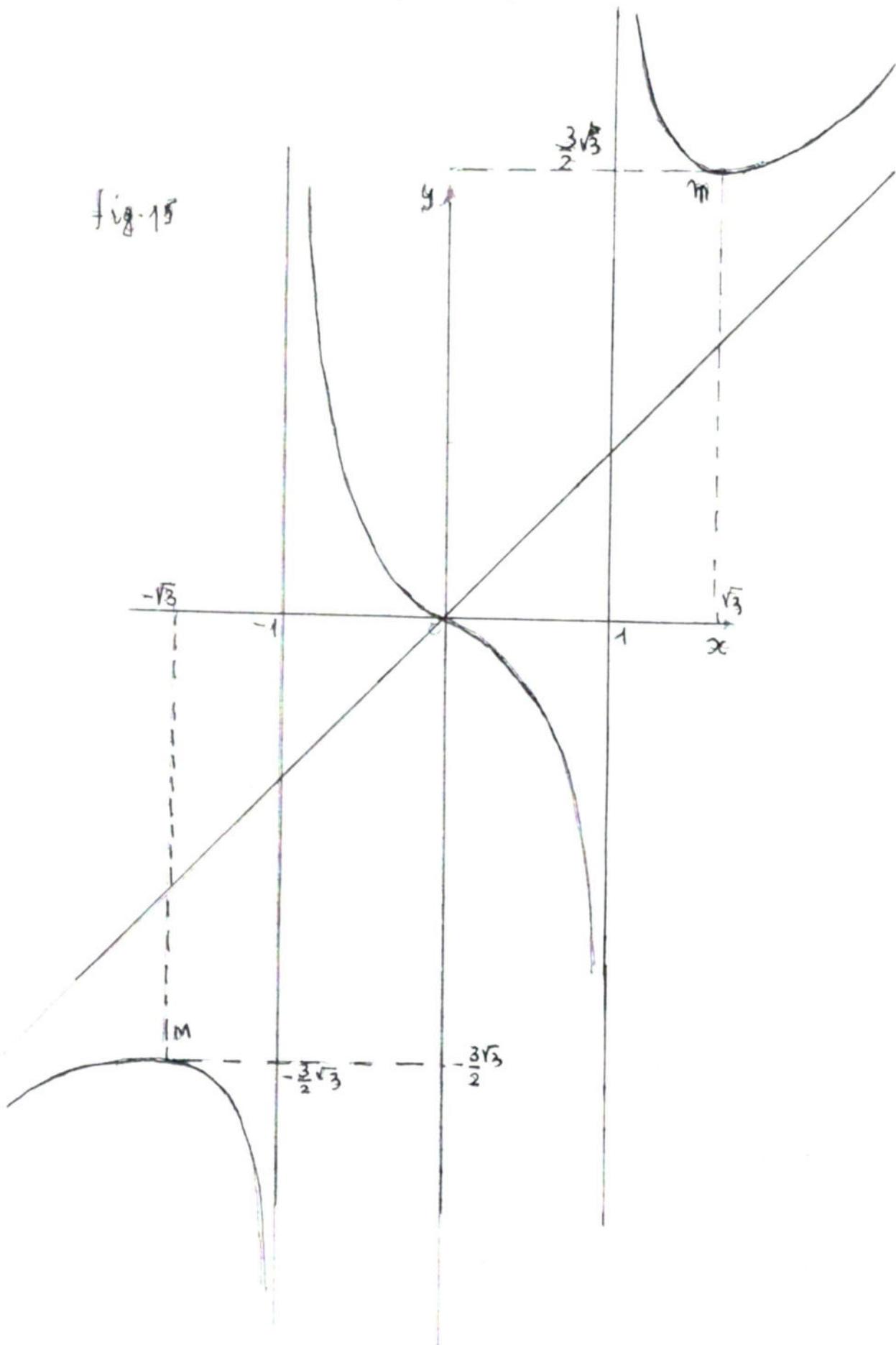
Studio del segno della curvatura

$$y'' = \frac{2x(2x+3)}{(x^2-1)^3} \text{ e risulta } y'' > 0 \text{ per } -1 < x < 0$$

$$\text{e } x > 1; y'' < 0 \text{ per } x < -1, 0 < x < 1.$$

Considerato $\sqrt{3} \approx 1,73$ e $\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$ il grafico della funzione in studio, a cui di fronte, è il seguente:

fig. 15



37

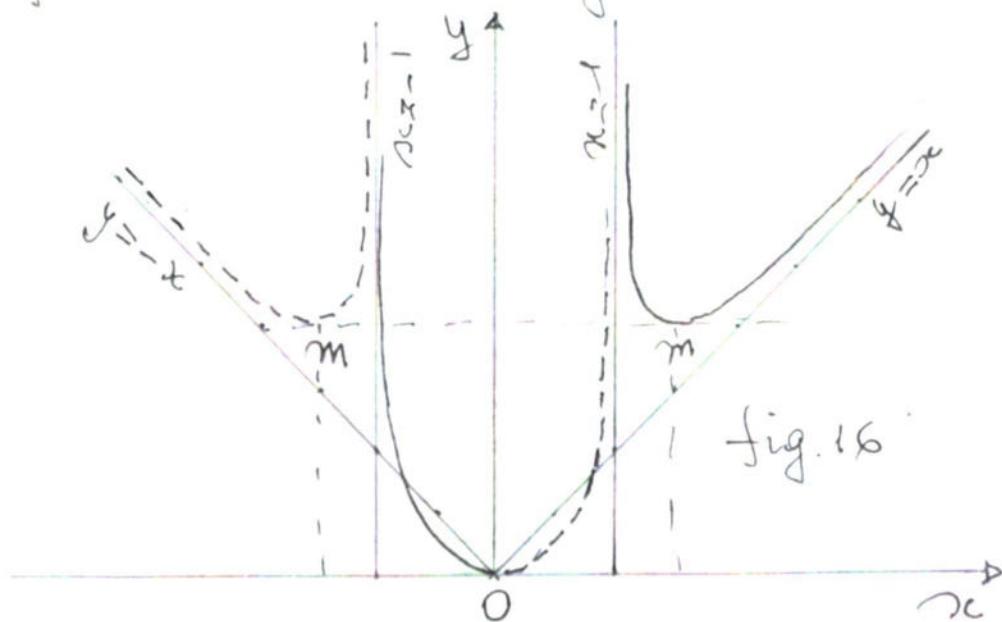
2) Studio della funzione.

$$y = \left| \frac{x^3}{x^2 - 1} \right|.$$

Svolgimento

Il grafico della funzione è ottenibile dal grafico della 1) tenendo conto che il valore assoluto chiede che $\left| \frac{x^3}{x^2 - 1} \right|$ venga presa in considerazione tale che il tutto deve considerarsi nel semipiano $y > 0$; la parte della 1) giacente nel semipiano $y < 0$ non vi rimane mentre la parte del grafico della 1) giacente nel semipiano $y < 0$ va ruotato (ribaltato) sul semipiano $y > 0$.

Il grafico della funzione $y = \left| \frac{x^3}{x^2 - 1} \right|$, pertanto sarà il seguente:



N.B.

La parte zatteggiata del grafico della funzione $y = \left| \frac{x^3}{x^2 - 1} \right|$ è quella ottenuta dal ribaltamento di $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Commento:

- 1) Gli asintoli della funzione $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

sono diventati asintoti della funzione
 $y = \left| \frac{x^3}{x^2 - 1} \right|$

- 2) Le parti di curva di ordinata negativa sono state ribaltate divendo punti di ordinata positiva.
- 3) il massimo di ordinata negativa si è trasformato in minimo di ordinata positiva
- 4) l'intersezione con l'asse x è rimasta invariata
- 5) il flesso di coordinate $(0, 0)$ si è trasformato in minimo di coordinate $(0; 0)$
 Si osservi che anche in questo caso si può parlare di trasformazione geometrica.

3) Studio della funzione:

$$y = \log \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Svolgimento

Il dominio della funzione è $D(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$;
 studio del segno della funzione:

$$\begin{aligned} y < 0 &\text{ per } 0 < \frac{x^3}{x^2 - 1} < 1, \quad y = 0 \text{ per } \frac{x^3}{x^2 - 1} = 1 \\ y > 0 &\text{ per } \frac{x^3}{x^2 - 1} > 1. \end{aligned}$$

per cui si conclude che:

$$y > 0 \text{ per } \frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1} > 0$$

per cui, con l'aiuto della calcolatrice:

$$y > 0 \text{ per } -1 < x_0 < 0, \quad x_0 > 1 \\ \text{con } x_0 \approx -0,75$$

$$y < 0 \text{ per } x_0 < x < 0$$

si ha anche:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y \rightarrow +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} y \rightarrow -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} y \rightarrow \infty$$

Ricerca degli asintoti

$$x = -1, x = 0, x = 1$$

Ricerca degli estremanti:

$$y' = \frac{x^2-1}{x^3} \cdot \frac{3x^2(6x^2-1)-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-2x^2-3}{x(x^2-1)} = \frac{x^2-3}{x(x^2-1)}$$

$$\text{sarà } y' = 0 \text{ se } x^2-3=0 \text{ da cui } x = \pm \sqrt{3}$$

Poiché $x = -\sqrt{3}$ non appartiene al dominio viene scartato e accettiamo $x = \sqrt{3} > 1$

$$\text{Poiché } y'' = \frac{-x^4+8x^2-3}{x^2(x^2-1)^2} \text{ e risulta}$$

$y''(\sqrt{3}) = 1 > 0$ concludeva che la funzione ammette un minimo relativo in $(\sqrt{3}, \log \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

Ricerca dei flessi

$$\text{poniamo } y'' = \frac{-x^4+8x^2-3}{x^2(x^2-1)^2} = 0 \text{ per cui}$$

$$x^4 - 8x^2 + 3 = 0 \quad \Delta = 16 - 3 = 13 \quad \text{e}$$

$$x^2 = 4 \mp \sqrt{13} \quad \text{otteniamo:}$$

$$x = \pm \sqrt{4 \mp \sqrt{13}}$$

Per la regola di Cartesio l'equazione di quarto grado ammette due soluzioni positive in x^2 .

Dei quattro soluzioni in x due soluzioni sono da scartare poiché non appaiono al dominio.

$$\text{Accettiamo } x_1 = -\sqrt{4-\sqrt{13}} \approx -0,63 \quad \text{e}$$

$$x_2 = \sqrt{4+\sqrt{13}} \approx 2,76 > 1$$

Inoltre $y'' > 0$ per $-1 < x < x_0$ e

$$1 < x < \sqrt{4+\sqrt{13}}$$

$y'' < 0$ per $x_0 < x < 0$ e

$$x > \sqrt{4+\sqrt{13}}$$

Pertanto il grafico della funzione, a un di
presso è il seguente:

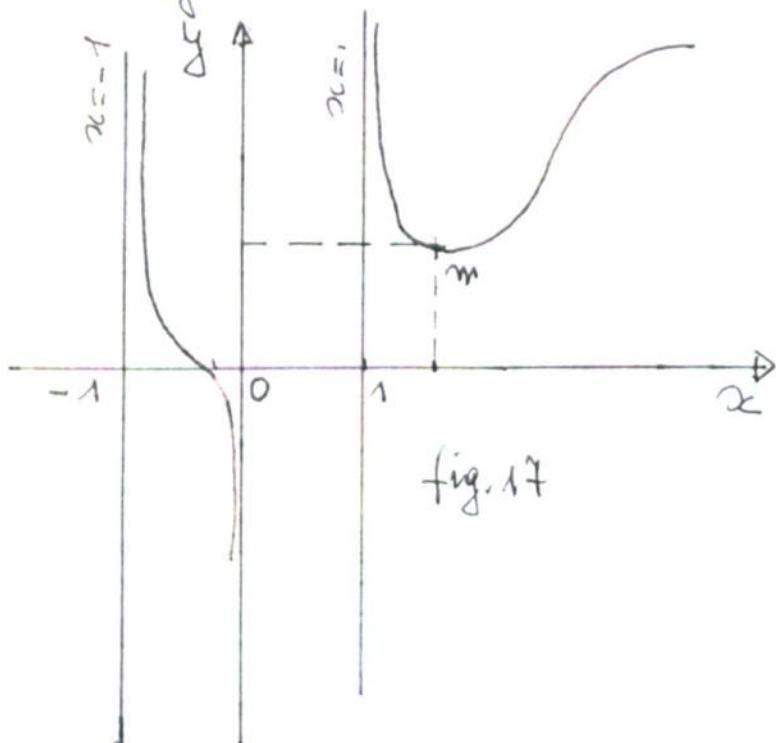


fig. 17

Considerazioni:
 La funzione $y = \log \frac{x^3}{x^2 - 1}$ ha conservato poco
 della $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$; infatti

- 1) gli asintoti $x = \pm 1$ sono rimasti
- 2) è stato conservato il minimo
- 3) è aumentato l'asintoto $x = 0$
- 4) nel punto $x = 0$ il flesso ha dato luogo all'asintoto $x = 0$.
- 4) Stesura della funzione:

$$y = \frac{1}{\frac{x^3}{x^2 - 1}} = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

Svolgimento

Il dominio della funzione è costituito da

$$D_{f(x)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

Ricerca delle intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \quad | \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

41
Studio del segno della funzione:

$$y \geq 0 \text{ se } \frac{x^2-1}{x^3} \geq 0$$

$$\text{ossia se } x(x^2-1) \geq 0$$

Quindi sarà

$$y > 0 \text{ per } -1 < x < 0, x > 1$$

$$y \leq 0 \text{ per } x < -1, 0 < x < 1$$

Ricerca degli asymptoti:

$$n=0$$

Ricerca degli estremanti:

$$y' = \frac{2x^4 - 3x^2(x^2-1)}{x^6} = \frac{x^2(2x^2 - 3)(x^2 + 3)}{x^6}$$

per cui sarà

$$y' = 0 \text{ per } x = \pm\sqrt{3}.$$

$$y' > 0 \text{ per } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \quad (x \neq 0)$$

$y' < 0$ per $x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$; dal grafico risulta:

Per cui è
evidente
che la funzione

presenta un minimo relativo in $x = -\sqrt{3}$ e uno
massimo relativo in $x = \sqrt{3}$.

poiché $y(\pm\sqrt{3}) = \mp\frac{2\sqrt{3}}{3^2}$ possiamo forse

$$m(-\sqrt{3}; -\frac{2}{3^2}\sqrt{3}) \text{ e } M(\sqrt{3}; \frac{2}{3^2}\sqrt{3})$$

Calcoli due eventuali flessi:

$$y'' = \frac{-2x^5 - 4x^3(-x^2+3)}{x^8} = \frac{2x^5 - 12x^3}{x^8} = \frac{x^3(2x^2 - 12)}{x^8} =$$

$$= \frac{2(x^2 - 6)}{x^5}; \text{ posto } y'' = 0 \text{ se } x = \pm\sqrt{6}$$

Quindi la curva presenta due flessi F_1, F_2 le cui ordinate sono:

$$y(\pm\sqrt{6}) = \frac{6-1}{(\pm\sqrt{6})^3} = \mp\frac{5}{6\sqrt{6}} = \mp\frac{5\sqrt{6}}{36} \quad \text{Quindi ottiene}$$

$$\text{mo } F_1(-\sqrt{6}; -\frac{5\sqrt{6}}{36}), F_2(\sqrt{6}; \frac{5\sqrt{6}}{36})$$

42

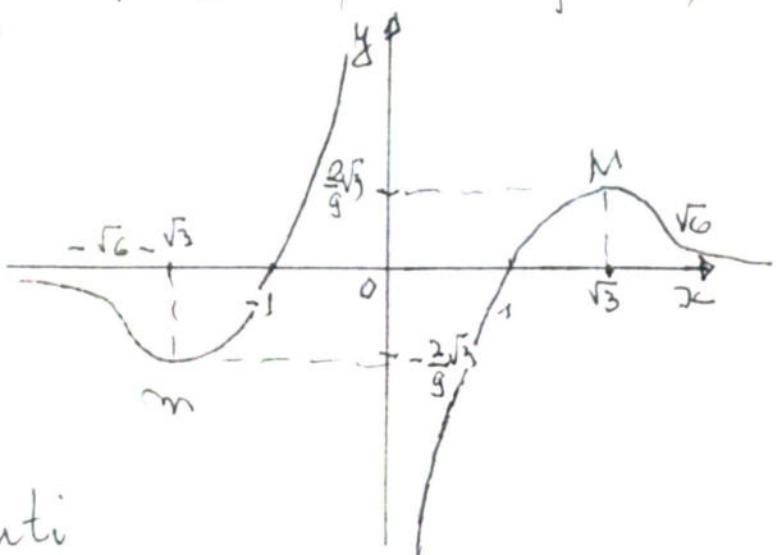
Osserviamo inoltre:

$y'' < 0$ per $x < -\sqrt{6}$ e $0 < x < \sqrt{6}$

$y'' > 0$ per $-\sqrt{6} < x < 0$, $x > \sqrt{6}$

Il grafico della funzione, a un disegno, è
il seguente:

fig. 18



Caratteristiche
conservate:

1) Due estremanti

5) Studio della funzione: $y = e^{\frac{x^3}{x^2-1}}$

Svolgimento

Il dominio della funzione è: $D_{f(x)} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 1\}$

Ricerca delle intersezioni con
gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Studio del segno della funzione:

$$y > 0 \quad \forall x \in D_{f(x)}$$

Ricerca degli asintoti

$$x_0 = -1, x_0 = 0, x_0 = 1$$

Ricerca degli estremanti:

$$y' = e^{\frac{x^3}{x^2-1}} \cdot \frac{x^2(x-3)}{(x^2-1)^2} \quad \text{poiché } y' = 0 \text{ fu}$$

$$x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}; y' > 0$$

$$y' > 0 \text{ per } x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}; y' \leq 0 \text{ su } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

13

Poiché nell'intervallo $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ non vi è variazione di segno per la y' si deduciamo che in $x=0$ non esiste un estremante; in $x=\sqrt{3}$ la funzione presenta un massimo relativo M e in $x=-\sqrt{3}$ un minimo relativo; il punto di ascissa $x=0$ è un flesso. Le ordinate di tali punti sono:

$$y(-\sqrt{3}) = e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}, \quad y(0) = 1, \quad y(\sqrt{3}) = e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

quindi

$$M(-\sqrt{3}; e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}), \quad F(0; 1), \quad m(\sqrt{3}; e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}})$$

Premesso che il grafico della funzione è costituito da tutti i punti di ordinata non negativa, calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y \rightarrow 0$$

Pertanto $y=0$ è un ulteriore asintoto della curva.

Pertanto:

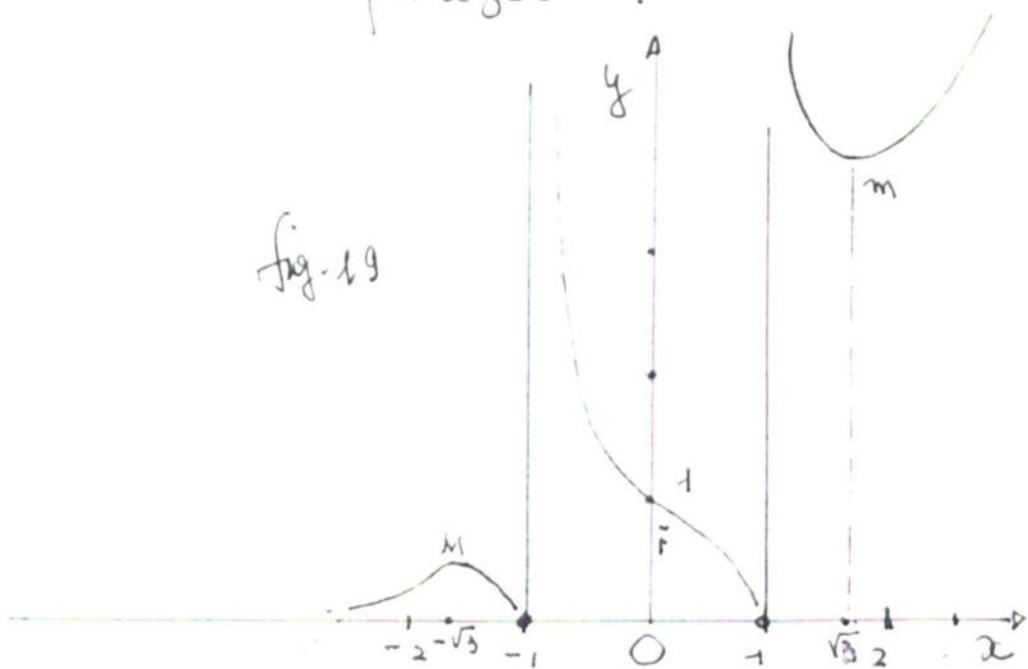
dato che nel massimo M la curva deve, per forza di cose, aumentare la curvatura rivoltar verso le $y < 0$ perché $y=0$ risulti un asintoto (sinistro) a sinistra di $x=-\sqrt{3}$ la curva deve presentare una inflessione altrimenti dovrebbe attraversare l'asse x : cosa che non succede.

Insomma si osservi che:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y \rightarrow 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y \rightarrow +\infty$$

e quindi $x=1$ non appartiene alla curva.

^{4.4}
Quanto detto ci consente di tracciare, a un di presso, il grafico della funzione:



Della curva primitiva si sono osservati diversi caratteri; sono rimasti inalterati, però, solo due asintoti.

Vorrei mettere fine al presente studio sintetizzando con una analisi comparativa generalizzando la ricerca:

Riportiamo le funzioni studiate:

$$1) \quad y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$2) \quad y = |f(x)|$$

$$3) \quad y = \log f(x)$$

$$4) \quad y = \frac{1}{f(x)}$$

$$5) \quad y = e^{f(x)}$$

e osserviamo quanto segue:

- a) il dominio delle funzioni associate varia a seconda delle operazioni effettuate sul nucleo $f(x)$.
- b) le intersezioni con gli assi si conservano dal n. 1 al n. 2 ma non negli altri casi
- c) la positività della funzione si conserva nei numeri 1) e 4) ma non negli altri casi
- d) per gli estremanti calcoliamo la derivata prima di ogni funzione:

$$\text{n. 1} \quad y' = f'(x)$$

$$\text{n. 2} \quad y' = \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot f'(x) \quad f(x) \neq 0$$

$$\text{n. 3} \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad f(x) \neq 0$$

$$\text{n. 4} \quad y' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \quad f(x) \neq 0$$

$$\text{n. 5} \quad y' = e^{\frac{f(x)}{x}} \cdot f'(x)$$

Dall'analisi delle derivate si deduce che dopo aver posto $f'(x)=0$, si ottiene $y'=0$ per tutti i tipi di funzione, compatibilmente col dominio, gli estremanti si conservano.

Calcoliamo infine la derivata seconda delle stesse funzioni e ottieniamo:

$$\text{n. 1} \quad y'' = f''(x)$$

$$\text{n. 2} \quad y'' = \frac{[f''(x)f(x) + f'^2(x)]|f(x)| - [f'(x)f(x)]^2}{f^2(x)} : f(x)$$

$$\text{n. 3} \quad y'' = -\frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)^2}{f'(x)}$$

n. 5 $y'' = e^{f(x)} [f'(x)^2 + f''(x)]$ e posto $f''(x) = 0$
si ottiene:

n. 1 $y'' \geq 0$

n. 2 $y'' = \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]^2 - \frac{f'(x)^2}{|f(x)|^2}$

n. 3 $y'' = - \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]^2$

n. 4 $y'' = 2 \frac{f'(x)}{f^3(x)}$

n. 5 $y'' = f'(x)^2 e^{f(x)}$

E' facile dedurre che:

a) le derivate seconde, in generale non forniscono gli stessi fatti.

b) una ultima considerazione ci porta all'osservazione di casi di simmetria, sulle corrispondenze degli zeri e i punti all'infinito.

c) la funzione numero 2) ossia $y = |f(x)|$ è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani; infatti:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$$

d) La funzione n. 4, ossia $y = \frac{1}{x^3} = \frac{x^2}{x^3 - 1}$
è simmetrica rispetto all'origine
degli assi cartesiani; infatti:

$$\frac{1}{f(-x)} = \frac{(-x)^2}{(-x)^3} = \frac{x^2}{-x^3} = -\frac{x^2}{x^3} = -\frac{1}{f(x)}$$

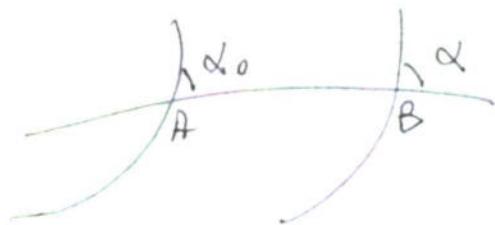
e) lo zero di $f(x)$ della n. 1 è riavisto
zero per la n. 2 ma ha dato luogo a
un punto d'infinito per la n. 3 e n. 4;

47

gli infiniti della n. 2 sono rinvolti i infiniti
per la n. 2 per la n. 3 e, parzialmente,
per la n. 5.

N. 3

Risoluzione di Geodesia



Presentazione

Le due tesine che seguono sono state da me presentate all'Università di Palermo a corredo della mia tesi di laurea che, purtroppo, dico la tesi, per causa a me ancora ignota, è stata smarrita.

Per altra tesi ricordo, appena appena, il tema che trattava: "le proprietà delle assintotiche su una superficie geometrica regolare (o di Kummer); comunque si tratta di un capitolo di geometria differenziale.

Sono sopravvissute le due tesine che mi prefiggo di presentare e spero che possano essere ben accolte da qualche lettore.

È mia intenzione portare ai tipi qualche altro lavoro che ancora viene custodito nel mio archivio.

Le tesine che verranno presentate sono:

3) Tesina di Geodesia

4) Tesina sul teorema e la trasformazione di Montard.

Ecco la Tesina n. 3.

Tesina di Geodesia

Teorema di Clairaut per le geodetiche di una superficie di rotazione ed applicazione al trasporto delle coordinate geografiche e dell'azimut lungo un arco di geodetica dell'ellissoide rotondo.

Introduzione

DATA una superficie qualsiasi Σ , una curva, tracciata su di essa, tale che in ogni punto la normale principale coincide con la normale alla superficie, chiamasi geodetica.

La geodetica inoltre è la linea più breve che unisce due punti su una superficie.

Se:

$x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ sono le equazioni parametriche della geodetica (parametro è l'arco s) e x, y, z i coseni di rettangoli della normale alla superficie in un punto generico P , le equazioni differenziali delle geodetiche sono:

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{z} \quad \text{essendo}$$

$\rho \frac{d^2x}{ds^2}$, $\rho \frac{d^2y}{ds^2}$, $\rho \frac{d^2z}{ds^2}$ i coseni direttori della normale principale alla geodetica

$$\text{e } \rho = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

avendo posto per brevità:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Superficie di rotazione.

Una superficie di rotazione è una superficie ottenuta dalla rotazione di una curva qualsiasi C attorno a un asse che non l'attraversi.

Assunto l'asse di cotagione come asse Z (OZ), e detta r la distanza di un punto P dall'asse Z ed α l'angolo del piano OZP col piano OZX , ed essendo $Z = f(x)$, l'equazione della sezione col piano OZX della superficie di cotagione, questa avrà le equazioni:

$$\begin{cases} x = r \cos \omega \\ y = r \sin \omega \\ z = f(r) \end{cases} \quad a)$$

Tesoreau di Clairaut.

Sopra una superficie di rotazione è costante il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'angolo d'inclinazione (azimuth) della geodetica sul meridiano.

Giudichiamo verif. con
l'angolo formato, in un punto
genico, dalla geodetica
e dal parallelo, passanti
per lo stesso punto.

Siano t_g e t_p le tan-
genti, in P , alla geodeti-
ca g e al parallelo p ,
rispettivamente.

allo zo si ha

$$\cos \beta = \cos t_{\hat{y}}^{\hat{x}} \cos t_{\hat{p}}^{\hat{x}} + \cos t_{\hat{y}}^{\hat{y}} \cos t_{\hat{p}}^{\hat{y}} + \cos t_{\hat{y}}^{\hat{z}} \cos t_{\hat{p}}^{\hat{z}}$$

for α

$$\begin{cases} \cos \hat{t}_x = \frac{dx}{ds} \\ \cos \hat{t}_y = \frac{dy}{ds} \\ \cos \hat{t}_z = \frac{dz}{ds} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos \hat{p}_x &= \cos(90^\circ + \omega) = -\sin \omega \\ \cos \hat{p}_y &= \cos \omega \\ \cos \hat{p}_z &= \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

perciò

$$\cos \beta = -\sin \omega \frac{dx}{ds} + \cos \omega \frac{dy}{ds} \quad 1)$$

e sostituendo dalla a) ottiene:

$$\cos \beta = -\frac{y}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{x}{r} \frac{dy}{ds}$$

$$r \cos \beta = \frac{x dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \quad 2)$$

ma intanto

$$\frac{\frac{d^2 x}{ds^2}}{x} = \frac{\frac{d^2 y}{ds^2}}{y}; \quad X = p \frac{\partial(y, z)}{\partial(e, \omega)}, \quad Y = p \frac{\partial(x, z)}{\partial(e, \omega)}$$

quindi si riceava:

$$X = -p e \cos \omega f'(e), \quad Y = -p e \sin \omega f'(e)$$

$$-p e \sin \omega f'(e) \frac{d^2 x}{ds^2} + p e \cos \omega f'(e) \frac{d^2 y}{ds^2} = 0$$

essendo $p = \frac{1}{r \sqrt{1 + [f'(e)]^2}}$ e sostituendo

dalla a):

$$-x \frac{d^2 y}{ds^2} - y \frac{d^2 x}{ds^2} = 0 \quad \text{ma anche}$$

$$x \frac{d^2 y}{ds^2} - y \frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad \text{da cui}$$

si deduce che:

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = c \quad (\text{costante})$$

e sostituendo nella 2), infine, si ha:

$$x \cos \beta = c$$

ma $\beta = 90^\circ - \alpha$ quindi $\cos \beta = \sin \alpha$
perciò il teorema di Clairaut:

$$r \sin \alpha = c \quad (3)$$

2) Come applicazione delle cose dette, consideriamo l'ellissoide di rotazione di equazione:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Le equazioni differenziali delle geodetiche saranno:

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad b)$$

e poiché:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{a^2} x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{a^2} y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2}{b^2} z$$

sostituendo tali valori nella b) si ha:

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{y}{a^2}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{z}{b^2}} ; \text{ dalla prima}$$

ugualanza si ottiene:

$$x \frac{d^2x}{ds^2} = y \frac{d^2y}{ds^2} ; x \frac{d^2y}{ds^2} - y \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds} (x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}) = 0$$

quindi

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = c$$

e sostituendo:

$$x = r \cos \omega$$

$$y = r \sin \omega$$

si ottiene:

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = r^2 \frac{d\omega}{ds} = c$$

$$\text{e poiché: } x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = r \sin \omega$$

si ottiene:

$$r \operatorname{sec} \alpha = c \quad (3)$$

e anche:

$$r \operatorname{sec} \alpha = \tilde{c} \frac{d\omega}{ds} ; \quad \operatorname{sec} \alpha = \tilde{c} \frac{d\omega}{ds}$$

Senza perdere in generalità possiamo supporre positiva la costante c ; giacché scegliendo opportunamente il verso positivo di percorrenza della geodetica considerata, si potrà fare in modo che α sia compreso fra 0 e π .

La c , di conseguenza, varierà tra zero ed ∞ ossia $0 \leq c \leq \tilde{c}$ oppure $\tilde{c} > c$; dunque:

Ogni geodetica, la cui costante di Clairaut è c , svolgerà il suo corso fra i due paralleli ellissoidici di raggio c .

Dalla 3) segue ancora:

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{c}^2 - c^2} \quad \text{e quindi}$$

anche:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{c}{\sqrt{\tilde{c}^2 - c^2}} \quad (c)$$

però, (verif fig. 2)

$$\overline{AP} = \tilde{c} d\omega$$

$$\overline{AB} = g d\varphi$$

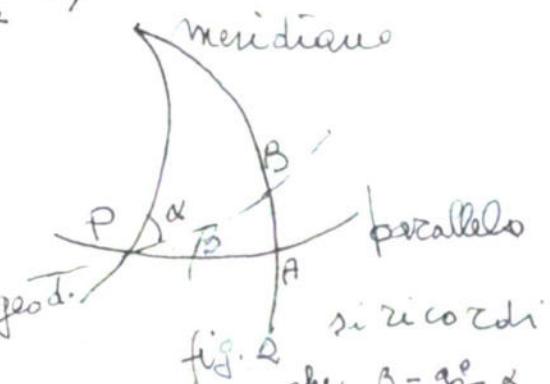
4)

Dal triangolo rettangolo $\triangle AOP$ si ha:

$$\overline{AP} = \overline{PB} \operatorname{sec} \alpha \quad 5) \quad \overline{PB} = ds$$

$$\overline{AB} = \overline{PB} \cos \alpha$$

e infine, confrontando con lo 4)
si ha: $(ds) \operatorname{sec} \alpha = \tilde{c} d\omega ; ds \cdot \cos \alpha = g d\varphi \quad 6)$



e dividendo membro a membro dalle relazioni:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\varphi} \frac{d\omega}{d\varphi}$ e sostituendo
nella c) si ha:

$$\frac{r}{\varphi} \frac{d\omega}{d\varphi} = \pm \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \quad 7)$$

che è una equazione differenziale del
primo ordine (in particolare a variabili
separabili).

Allora segue subito

$$\omega = \omega_0 \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{c \rho d\varphi}{r \sqrt{r^2 - c^2}} = \omega_0 \pm c \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \frac{d\varphi}{r \sqrt{r^2 - c^2}} \quad 8)$$

Tale risulta

l'integrale generale delle geodetiche sulle
superficie di rotazione.

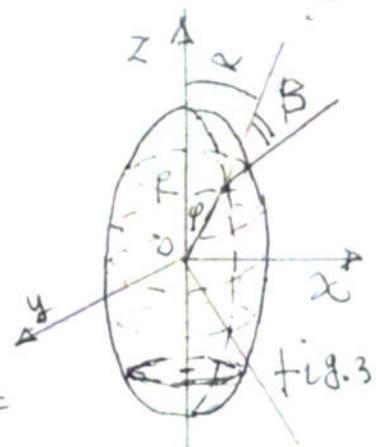
Nel secondo membro della 8) va preso il
segno superiore se l'azimut non supera
 $\frac{\pi}{2}$; il segno inferiore se l'azimut non
è inferiore a $\frac{\pi}{2}$.

E' facile persuadersi che la geodetica
tocco i due paralleli ellissoidici di raggio
 $r=c$, perché nei punti comuni con essi
si ha $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Consideriamo, (vedi fig. n.3)

per fissare le idee, un rameo
geodetico lungo il quale α
non supera $\frac{\pi}{2}$ e siano $-\varphi_1$ e φ_1
le latitudini dei paralleli
estremi di raggio $r=c$, tocca-
ti dalla geodetica.

Per la convenzione fatta, lungo questo
rameo va preso il segno superiore della 8), e



il senso positivo di percorrenza è quello ascendente, che va, cioè, dal parallelo $-q_1$ al parallelo q_1 .

Il punto di contatto col parallelo q_1 , non può essere di regresso per la geodetica, perché risulta deve mantenersi sempre positivo e quindi di non poter mai superare π .

La geodetica procede, pertanto, nel senso delle longitudini ascendenti e, discendendo, torna a toccare il parallelo di latitudine $-q_1$.

E così via.

Si riconosce subito che la differenza di latitudine $\Delta = \omega - \omega_0$, fra i due contatti successivi, con l'uno e con l'altro parallelo, è costante.

Infatti, questa differenza tra il primo contatto col parallelo $-q_1$ e il primo contatto col parallelo q_1 , è:

$$\Delta = c \int_{-q_1}^{q_1} p \frac{d\varphi}{2\sqrt{z^2 - c^2}}.$$

E quella tra il primo contatto col parallelo q_1 ed il secondo contatto col parallelo $-q_1$, poiché in questo secondo non è inferiore a $\frac{\pi}{2}$, è:

$$\Delta_1 = -c \int_{q_1}^{-q_1} p \frac{d\varphi}{2\sqrt{z^2 - c^2}} = c \int_{-q_1}^{q_1} p \frac{d\varphi}{2\sqrt{z^2 - c^2}} = \Delta$$

In generale si vede facilmente che questi due rami sono simmetrici rispetto al meridiano passante per il punto di contatto col parallelo (cioè sono eguali gli archi di uno stesso parallelo compresi tra il meridiano e i due rami della geodetica).

Se il rapporto di Ω e 2π è un numero razionale, la geodetica si chiude, dopo un certo numero di serpeggiamenti ma, in genere, questo non accade mai, sicché la geodetica serpeggia sempre tra i due paralleli estremi senza chiudersi.

Si trova, per esempio, per mezzo delle funzioni ellittiche, che, dopo aver toccato il parallelo di latitudine $-q_1$, la geodetica incontra (per la prima volta) l'equatore in un punto la cui longitudine, rispetto al quel punto di contatto, è press'a poco di:

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{e^2 \cos q_1}{2}\right);$$

cioè la geodetica ha fatto un po' meno di un giro di giro; poi tocca il parallelo di latitudine q_1 , dopo uno spostamento in longitudine di circa:

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{e^2 \cos q_1}{2}\right)$$

a partire dal contatto col parallelo di latitudine $-q_1$; ecc.

L'elemento lineare della geodetica si ottiene dalla forma generale:

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + \varepsilon^2 d\omega^2$$

Tenendo conto dell'equazione 8).

Si trova:

$$ds^2 = \rho^2 \varepsilon \frac{d\varphi^2}{r^2 - c^2}$$

e quindi si ha per la lunghezza dell'arco della data geodetica, compreso tra le latitudini q_0 e q_1 :

$$S = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} p r \frac{d\varphi}{\sqrt{z^2 - c^2}} \quad (8)$$

gli integrali che si presentano nelle formule 8) e 9), quando in esse si sostituiscono i valori di p e di r spettanti all'ellisside di rotazione, risultano ellittici, e, in realtà, vengono calcolati per mezzo di opportuni sviluppi in serie.

Essi, del resto, possono anche essere calcolati per mezzo delle tavole delle tavole delle funzioni ellittiche e noi qui ci limiteremo a mostrare come si possono risolvere i problemi fondamentali di geometria ellissistica.

Uno di questi problemi è il così detto

"trasporto delle coordinate geografiche e dell'azimut lungo un arco di geodetica".

Sia dato un punto A (sull'ellisside) di coordinate φ_0, ω_0 ed un arco di geodetica AB, formante l'angolo α , col meridiano di A e la cui lunghezza sia s.

Si chiamino φ, ω le coordinate di B; il problema anzidetto consiste nel determinare φ, ω e α , noti $\varphi_0, \omega_0, \alpha_0$ ed s.

Il teorema di Clairaut fornisce subito il valore della costante c della geodetica

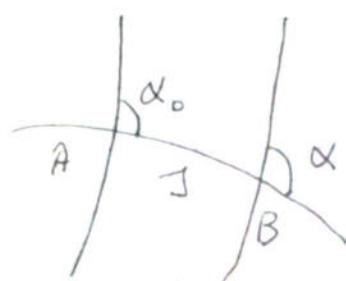


fig. 4

considerata, giacchè:

$$c = r_0 \sin \varphi_0$$

essendo r_0 il raggio del parallelo passante per A (noto perchè è noto φ_0):

$$r_0 = \frac{r_0 \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}}.$$

Ora l'equazione 9) ci dice che s è funzione noto di φ e quindi essa definisce φ come funzione di s .

Dalla 9), affatto, (per mezzo delle tavole delle funzioni ellittiche) potremo avere φ , essendo dato s e avendo già calcolato c .

Da 8), nel caso nostro, si scrive:

$$\omega = \omega_0 \pm c \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (10)$$

e così abbiamo il valore di ω .

d'angolo α , finalmente, si ottiene dalla equazione di Clairaut:

$$r_0 \sin \alpha = r_0 \sin \varphi = c \quad (11)$$

dove, ormai, tutto è noto eccetto α .

Un problema inverso del precedente, consiste nella ricerca di φ_0, α, s , noti che siano $\varphi, \omega, \alpha, \omega$.

Nella (10), in questo caso, l'unica incognita è c che può essere calcolata con l'uso delle funzioni ellittiche.

Tra si ha s dalla (9), mentre α e φ_0 si ottengono dalle relazioni (11).

Resina di geometria differenziale
Se teorema e la trasforma =
zione di
Moutard

Moutard ha presentato nel 1870 all'Accademia delle Scienze di Parigi un lavoro dal titolo:

"Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes."

Sfortunatamente il lavoro originale è andato distrutto negli incendi del Comune e l'estratto pubblicato successivamente non diede alcuna indicazione né sul metodo seguito dall'autore né sulla definitiva data all'osoluzione.

Nella relazione successiva pubblicata nel 1878 di una parte delle sue ricerche, Moutard trattò solamente le equazioni della forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = Mz \quad (1)$$

Il metodo di Moutard riposa su un teorema notevolissimo che andremo subito a esporre.

"Sia z una soluzione qualsiasi dell'equazione (1) ed R una soluzione particolare fissa; sicché:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = MR \quad (2)$$

Consideriamo i due determinanti:

$$D_1 = \begin{vmatrix} Z & R \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} Z & R \\ \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial y} \end{vmatrix}$$

e calcoliamo:

$$\frac{\partial D_1}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial D_2}{\partial x}.$$

Si ottiene:

$$\frac{\partial D_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Z & R \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}$$

ma

$$\begin{vmatrix} Z & R \\ \frac{\partial Z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial R}{\partial x \partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z & R \\ MZ & MR \end{vmatrix} = MRZ - MRZ = 0$$

e quindi:

$$\frac{\partial D_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x} & \frac{\partial^2 R}{\partial x} \end{vmatrix} \text{ sia logamente troviamo:}$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial y} = -\frac{\partial D_2}{\partial x} \text{ il che significa che l'espressione}$$

$D_1 dx - D_2 dy$ è un differenziale esatto; ciò significa che esiste una funzione Ψ , di x e y sole, tale che:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy \text{ dove } \frac{\partial \Psi}{\partial x} = D_1,$$

$$\text{e } \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -D_2.$$

Guardando allo sviluppo dei determinanti, possiamo scrivere:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = D_1 = Z \frac{\partial R}{\partial x} - R \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\text{a) } \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Z}{R} \right) \text{ similmente } \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Z}{R} \right) \quad \text{b)}$$

derivando la a) rispetto ad y e la b) rispetto ad x
e sommando si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{z}{R} \right) ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{z}{R} \right)$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = 0$$

S'è sufficiante e ottiene così:

$$-\frac{2}{R^3} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{2}{R^3} \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

e infine, riducendo si ha:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x \partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

o anche

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (3')$$

gli invarianti di questa equazione sono rispettivamente:

$$H = \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} \right)$$

$$K = \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right)$$

Poiché tali invarianti sono uguali allora sappiamo che ponendo $\varphi = R z'$ (4)
l'equazione trasformata in z' sarà della forma:

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} = M_1 z' \quad (5)$$

Il coefficiente M_1 di tale trasformata si può determinare, assai semplicemente, come opportunamente osserva Darboux, così:

la (3') è certamente verificata da $\varphi = 1$, sic-

che in base alla 4), la 5) è soddisfatta da $z' = \frac{1}{R}$ perciò si ha:

$$\frac{\partial^2 (\frac{1}{R})}{\partial x \partial y} = M_1 \frac{1}{R}$$

effe 20:

$$M_1 = R \frac{\partial^2 (\frac{1}{R})}{\partial x \partial y}$$

6) è la trasformata 5)
diventano:

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} = R \frac{\partial^2 (\frac{1}{R})}{\partial x \partial y} z' \quad 7)$$

Noi diremo che la 7) è la trasforma
ta di Moutard delle 1) mediante la so
luzione particolare R.

Altreza la 6), scritta sotto la segu
te forma:

$\frac{\partial^2 (\frac{1}{R})}{\partial x \partial y} = M_1 \frac{1}{R}$ ci dice che
l'inversa è una soluzione parti
olare della 7); e, se poi trasformiamo,
alla maniera di Moutard, la 7), con
la soluzione particolare $\frac{1}{R}$, il coef
ficiente M_1 andrà, secondo R il nostro
risultato in:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}$$

Ma essendo la soluzione della 1) si
ha:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = MR, \text{ dunque:}$$

$$M = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} \text{ effe 20}$$

la trasformata della 7) mediante
la soluzione $\frac{1}{R}$ è la 1), sicché le
due equazioni 1) e 7), sono trasfor
mate una dell'altra alla manie

za di Moutard, con due soluzioni inverse.
L'espressione di z' mediante z si ha subito tenendo presente la a) e b) che per $z = \frac{R}{R}$
si scrivono:

$$\frac{\partial}{\partial x} (R z') = - R^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{R} \right) \quad 8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (R z') = R^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{R} \right) \quad 9)$$

le quali danno l'integrale z' della
equazione trasformata 7) e la sua soluzio-
ne particolare R ; viceversa, la 8) e la 9),
scritte così:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{R} \right) = - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} (R z') \quad e$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} (R z') \quad danno$$

l'integrale z della 1) mediante la sua
soluzione particolare R e l'integrale z'
della 7); in tal modo possiamo enuncia-
re così il risultato conseguito da Mou-
tard:

Se si conosce una soluzione particolare R
dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = M z$$

e si trasforma l'equazione alla maniera
di Moutard in:

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} = R \frac{\partial^2 \left(\frac{z}{R} \right)}{\partial x \partial y} z'$$

ogni soluzione dell'una permetterà di
determinare soluzioni dell'altra e quindi
se si conosce l'integrale generale dell'u-
na, sifotrà, con quadrazture, conosce =

re l'integrale generale dell'altra.

Se due equazioni sono reciprocamente trasformate l'una dell'altra, alla una si ricava sì Moutard con soluzioni particolari inverse.

Litotipografia Michele Abate
di Vincenzo Abate
Via Calatafimi, 15 - Tel. 0923.881780
Fax 0923.526314
E-mail: info@abatetipografia.it
Paceco, febbraio 2018

