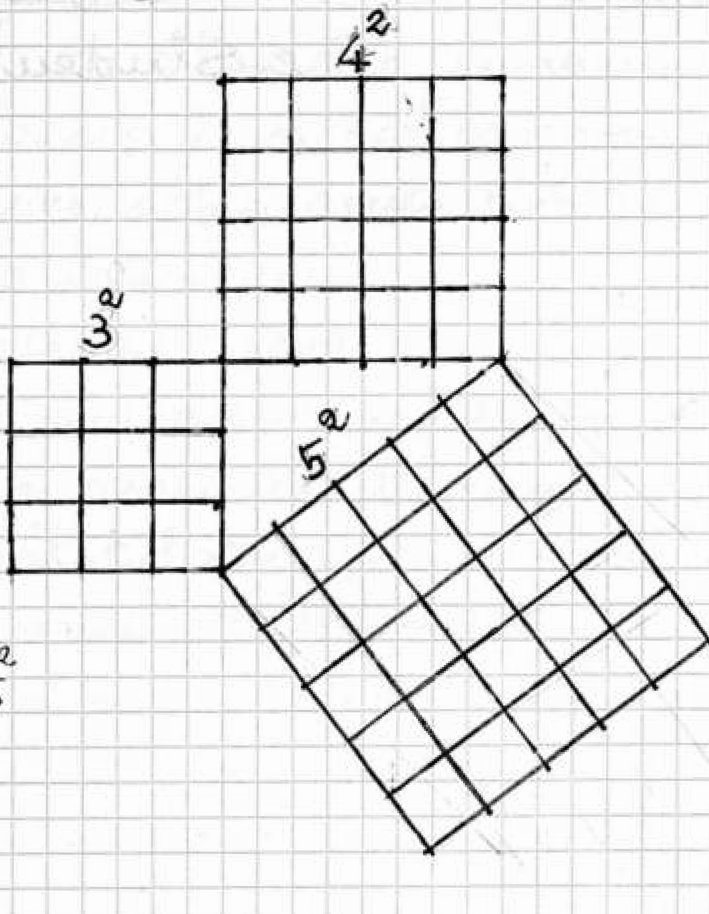
Giuseppe Ditta

Saggio sul teorema di Pitagora



$3^2+4^2=5^2$

A tutti gli
studenti
e studentesse

Introduzione

Il teorema di Pitagora rappresenta nella Matematica un "attrezzo" così utile da essere considerato indispensabile; nella Geometria, in particolare, gode del dono della ubiquità.

Poiché la Matematica ha esteso le sue radici su tutte le discipline che studiano fenomeni quantizzabili, si capisce come il teorema abbia avuto libero accesso ovunque.

La data della sua nascita è incerta, ma la storia delle Matematiche assicura che come caso particolare affonda le sue radici nella preistoria.

I casi riportati alla fine vogliono essere dei corollari del teorema e il problema

di Sterrart una splendida appli-
cazione.

Fraceco

Jeffpeditta

Proiettiamoci nel futuro

Il saggio sul teorema di Pitagora non si arroga alcuna velleità di innovazione ma spero, e non finirò "mai" di sperare, di contribuire a sfatare il pregiudizio di disgusto che molti esprimono sulla Matematica; anzi, ci si deve mettere in testa che, senza la Matematica, ci troveremmo ancora nella preistoria.

La Matematica e le scienze che ad essa si appoggiano, ci spiega i perchè degli eventi (Ci avvia al futuro).

Non dico tutti, ma come diceva il filosofo inglese Francis Bacon (1561-1628): "Quello che è incognito oggi sarà cognito domani."

Capisco che non tutti posseggono il "pallino" della Matematica, ma fra questi, gli agnostici, ci sono quelli che non sono riusciti a capire, e sono veramente moltissimi, che cosa è la Matematica, per noia o disimpegno.

Se a molti la Matematica "scolastica" è sembrata un fatto mnemonico non è detto che un riavvicinamento al "mostro" non possa indurli a cambiare il giudizio, prendendo coscienza di avere a che fare con un "animale domestico".

Si sa che apprendere la Matematica in modo mnemonico è il "metodo" peggiore.

Da soli, o con un tutore, è necessario capirne l'essenza.

Invito pertanto, il lettore a dare alla Matematica una seconda opportunità.

Paceco settembre 2015

L'Autore

Pitagora e il "suo" teorema

Il teorema di Pitagora è uno dei più famosi e utili che hanno arricchito la Matematica dandone lustro e vigore.

Della vita di Pitagora si sa pochissimo; gli storici concordano la data di nascita verso il 570 A.C. nell'isola greca di Samo (situata a Nord Est del Mare Egeo a ridosso dell'Asia Minore).

Pitagora lì fonda una Scuola ma, in seguito, per motivi politici, lascia l'isola e inizia a viaggiare; visita anche l'Egitto, e finalmente approda a Crotone nella Magna Grecia, penisola italica.

Anche qui fonda una Scuo=

la che ha come obiettivi l'in=
segnamento della Aritmetica,
Geometria, Musica e Astro=
nomia, senza disdegnare la
Politica e la Religione.

Per quanto concerne la Reli=
gione la scuola veniva consi=
derata una setta.

In tale setta, tutti coloro che
ne chiedevano l'ingresso veni=
vano selezionati; uomini e don=
ne dovevano giurare di man=
tenere il riserbo sulle attivi=
tà della scuola e, soprattutto,
sulle scoperte matematiche e
scientifiche in genere.

Tutti i beni degli aderen=
ti venivano assorbiti dalla
Amministrazione Scolastica e
messi a disposizione della
Comunità.

Le notizie sui lavori della Scuola sono venute a conoscenza dei posteri tramite i discepoli dei discepoli: Filolao, Archita.

Anche a Crotone Pitagora fu oggetto di persecuzioni a causa delle sue idee politiche, per cui è stato costretto ad abbandonare la città.

Dove abbia trascorso la vita fuori Crotone non è noto ma pare che alla sua morte sia stato sepolto a Metaponto.

Pitagora è famoso, soprattutto, per il teorema che porta il suo nome; la paternità gli è stata concessa dagli storici e dirò in seguito perché.

Prima che nascesse Pitagora, i Cinesi, gli Indiani, i Sumeri, i Babilonesi, gli Egiziani conoscevano terne di numeri soddisfacenti la relazione che, in seguito, venne chiamata pitagorica.

Qual'era la condizione perchè tre numeri (allora naturali) potessero formare una terna pitagorica?

"Dati tre numeri interi tali che la somma dei quadrati dei due più piccoli risultasse uguale al quadrato del numero maggiore essi costituivano una terna pitagorica."

Con la simbologia moderna, dati tre numeri interi (positivi) $x < y < z$ deve risultare:

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

La relazione 1) viene chiamata anche equazione diofantea perché rappresenta un caso particolare, per $n=2$, dell'equazione proposta da Diofanto:

$$x^n + y^n = z^n \qquad 2)$$

Alcuni esempi.

Consideriamo la terna 1, 2, 3 e calcoliamo:

$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ e poiché $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \neq 3^2 = 9$ detta terna non viene considerata pitagorica.

Consideriamo la terna 3, 4, 5 e calcoliamo:

$3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$ e poiché $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ detta terna è pitagorica.

Si può dimostrare che la terna 3, 4, 5 formata da numeri consecutivi è l'unica del suo genere.

Pitagora ha il merito di aver applicato la relazione

$$x^2+y^2=z^2 \qquad (3)$$

ai triangoli rettangoli qualsiasi.

Quindi:

se $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ sono rispettivamente le misure dei lati e dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo deve valere la relazione:

$$a^2+b^2=c^2 \qquad 4)$$

Considerato che nella setta vigeva il divieto di rendere pubblici gli studi non si è in grado di conoscere quale sia stata la dimostrazione del teorema ovvero la risoluzione della 4)

Gli architetti egiziani, prima degli studi pitagorici, utilizzavano la terna 3, 4,

5 per costruire un angolo retto utile per le imprese faraoniche nelle quali erano abilissimi.
Tali costruzioni sono state un vanto per l'architettura egiziana e tuttora sono considerate tanto ardite da lasciare increduli gli attuali ingegneri.
Il merito di Pitagora, rispetto, consiste nell'aver generalizzato la relazione 4) applicandola a tutti i triangoli rettangoli, esprimendo il teorema nel seguente modo:
" In ogni triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa."
L'importanza del teorema lo colloca, a tuttora, nei pri=

mi posti nella classifica delle scoperte matematiche; è sulla bocca di tutti coloro che hanno frequentato almeno la Scuola Media e si ritrova menzionato persino in una canzone di Celentano.

Qui, per amore di precisione, bisogna far notare che è da correggere un errore; infatti bisogna sostituire "uguali" con equivalente.

orbene dimostrerò come utilizzando la terna 3, 4, 5, gli Egiziani potevano costruire un angolo retto.

Prendiamo una corda e facciamo su di essa 12 nodi equidistanti fra loro.

Stesa la corda sul terreno, quindi, fissiamo con un paic chetto il primo nodo; tenendo ben tesa la corda fissiamo il 4° nodo e, successivamente, tenendo la corda sempre in ten=sione, fissiamo il nodo nume=ro nove come in figura:

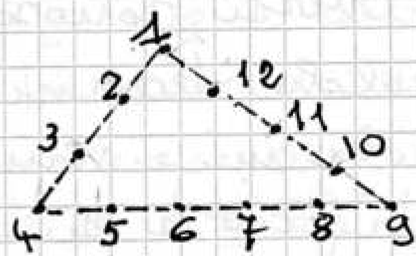


fig. 2

Congiungendo, anche idealmen=te, i nodi da uno a quattro e poi quelli da quattro a nove, comparirà un triangolo con vertice dell'angolo retto nel no=do n. 1; infatti:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

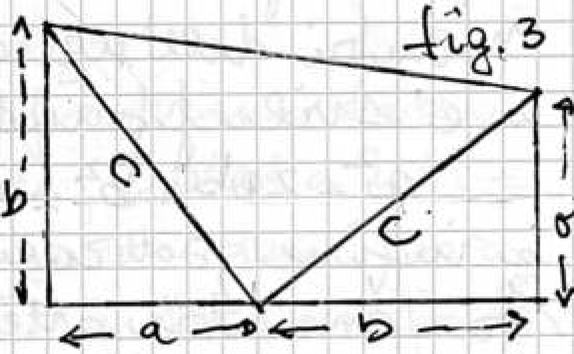
Ciò conferma che il triango=lo è rettangolo e il nodo n. 1 sta nel vertice dell'angolo retto.

Per la dimostrazione del teorema di Pitagora, sconoscendo il procedimento adottato dall'autore (per come si è detto) scelgo una delle circa 370 dimostrazioni, dovute ad autori diversi, conosciute fino a qualche decennio fa.

Quella che mi è sembrata meno artificiosa si deve ad un matematico dilettante, 20° Presidente degli Stati Uniti d'America: James Garfield.

La dimostrazione è semplicissima e si basa sulla equivalenza.

Orbene, si dispongano due triangoli rettangoli uguali di cateti $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e ipotenusa $\underline{c}$ come in figura 3;



La figura può essere considerata:
1) trapezio rettangolo di basi $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e altezza $\underline{a}+\underline{b}$
2) formata da tre triangoli rettangoli di cui due uguali di cateti $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e ipotenusa $\underline{c}$ e uno rettangolo isoscele di lato c.
Poiché l'area del trapezio risulta: $\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$
mentre la somma delle aree dei tre triangoli risulta
$\frac{1}{2}(ab+c^2+ab)$ per il principio di equivalenza le aree delle figure risultano uguali quindi

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}(ab+c^2+ab)$$

Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per 2 e sviluppando otteniamo:

$$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$$

e infine, sottraendo 2ab da ambo i membri otteniamo:

$$a^2+b^2=c^2 \qquad 4')$$

La 4') rappresenta il teorema di Pitagora.

Da tale relazione si può risalire alle misure dei lati:

$c=\sqrt{a^2+b^2}$, $a=\sqrt{c^2-b^2}$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$; indichiamo tali uguaglianze con 5).

In tal caso è entrata in ballo una nuova operazione: l'estrazione della radice quadrata.

Tanto per curiosità il simbolo di radice $\sqrt{\ }$ è stato in=

trodotto diversi secoli dopo Pitagora.

Il simbolo proviene dalla lingua latina; è stata utilizzata l'iniziale della parola "radix" che è stata un po' deformata in $\sqrt{\ }$ ed è il simbolo che noi oggi conosciamo.

L'operazione di estrazione di radice portò un po' di scompiglio fra i pitagorici in quanto, all'epoca, si conoscevano, in Grecia, i numeri razionali ossia i numeri interi e le frazioni con termini numeri interi.

Poichè $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$ non sempre portano a numeri interi o razionali in generale, per i pitagorici non erano numeri "convenzionali" e pertanto li chiamarono ti irrazionali.

Per giustificare il fatto che i pi=tagorici si erano fissati con i numeri interi basta considera=re la terna che loro proponeva=no per costruire quelle "pitagori=che" (ma non tutte):

$$m \,,\, \frac{1}{2}(m^2-1) \,,\, \frac{1}{2}(m^2+1) \qquad 6)$$

con m dispari e diverso da uno.

Intanto proviamo che la terna 6) è pitagorica e calcoliamo che:

$$m^2+\left[\frac{1}{2}(m^2-1)\right]^2=m^2+\frac{1}{4}(m^4-2m^2+1)=$$

$$=\frac{1}{4}(4m^2+m^4-2m^2+1)=$$

$$=\frac{1}{4}(m^4+2m^2+1)=\frac{1}{4}(m^2+1)^2=$$

$$=\left[\frac{1}{2}(m^2+1)\right]^2 \quad \text{c.d.d.}$$

Risolviamo l'equazione 4'):

$a^2+b^2=c^2$ in nu=meri interi (naturali).

Premettiamo che a, b, c siano primi fra loro perchè scelto un numero intero k la terna ak, bk, ck è pure pitagorica; inoltre supponiamo poste le condizioni:

$0 < a < c$, $0 < b < c$ e $a \neq b$

perchè nel caso $a = b$ il numero c non risulterebbe intero.

E' da aggiungere che a e b non possano essere entrambi dispari perchè c^2 risulterebbe il doppio (dispari + dispari) di un numero dispari e pertanto non sarebbe più un quadrato: a e b non possono essere entrambi pari perchè in tal caso c^2 risulterebbe pure pari e la terna a, b, c non sarebbe formata da numeri primi fra loro.

Supponiamo allora a pari e in tal caso la relazione 4') si può scrivere:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) \quad 7)$$

e dato che a è pari il suo quadrato a^2 contiene il fattore 2^2.

I due membri della 6), allora, si possono dividere per $2^2 = 4$ e si ottiene:

$$\frac{a^2}{4} = \frac{c-b}{2} \times \frac{c+b}{2}$$

e dato che $\frac{c-b}{2}$ e $\frac{c+b}{2}$ sono numeri primi fra loro, perchè il loro prodotto risulti un quadrato, anche loro devono essere dei quadrati.

Allora si può scrivere

$$\frac{c-b}{2} = m^2, \quad \frac{c+b}{2} = n^2 \quad 7')$$

con m, n numeri interi.

Con le 7') formiamo il sistema:

$$\begin{cases} c-b=2m^2 \\ c+b=2n^2 \end{cases} \quad 8)$$

e risolvendo si ottengono:

$$\begin{cases} a = 2mn \\ b = n^2 - m^2 \qquad (n > m) \qquad 9) \\ c = n^2 + m^2 \end{cases}$$

La risoluzione dell'equazione pitagorica, come ho detto prima, imbarazzò i pitagorici e mostro perchè.

Non considerando a, b, c primi fra loro e $a \neq b$, a^2+b^2, c^2-a^2, c^2-b^2 potrebbero non essere quadrati e quindi a, b, c (uno o più) potrebbero non essere più interi.

Consideriamo, per esempio, il caso $a = b$, allora dalla relazione pitagorica si ricava:

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \text{ e}$$

quindi $\quad c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Per rendere più "visibile" il caso passiamo alla geome =

tria e applichiamo il teorema di Pitagora a un quadrato di lato l e diagonale d; si ottiene:

10) $d^2 = 2l^2$

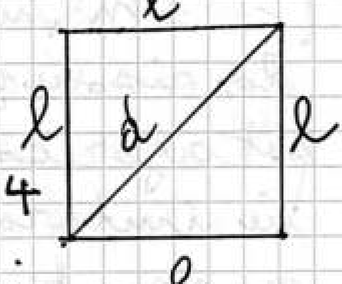


fig. 4

Mostrerò che nell'insieme dei numeri interi la 10) non è verificata.

Infatti, in tale insieme potremmo ipotizzare i casi:

1) l e d pari
2) l pari e d dispari
3) l dispari e d dispari
4) l dispari e d pari.

Discussione

1° caso

Se l e d sono pari i loro quadrati risultano pari e contengono il fattore 2 un numero pari di volte;

il secondo membro della 10)
allora conterrà il fattore 2
un numero dispari di volte
contrariamente a quanto ac=
cade al primo membro.
Si conclude che la 10) non è
verificata per numeri inte=
ri.

2° caso

Se l è pari anche il suo
quadrato sarà pari con fat=
tore 2 un numero pari di
volte, mentre, se d è dispa=
ri non contiene il fattore 2
e neanche il suo quadrato;
ne consegue che il
secondo membro della 10) con=
tiene il fattore 2 un nume=
ro dispari di volte men=
tre il primo membro non
contiene tale fattore.

Nel 3° e 4° caso si perviene alla stessa conclusione: la (6) non è valida per l e d interi e quindi l e d non possono essere entrambi razionali.

Dimostrazione del teorema di

Pitagora

Sceglierò da una pletora di dimostrazioni alcune più semplici che si basano sulla equivalenza.

1ª Dimostrazione

Vedasi pag. 15 fig. 3.

2° Dimostrazione

Consideriamo quattro triangoli rettangoli di ipotenusa c e cateti a e b.

Disponendo tali triangoli come in figura si ot=

tiene un quadrato di lato c (esterno) e un quadrato di lato (b-a) interno.

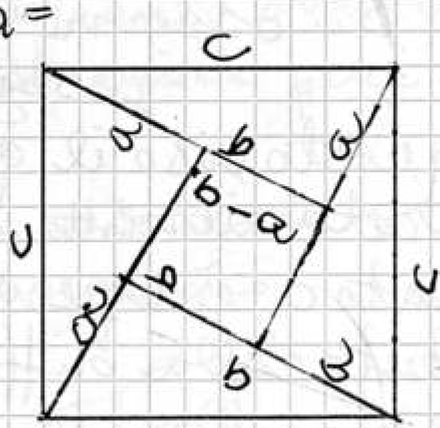


fig. 5

Orbene la area del quadrato di lato b-a si ottiene sottraendo dall'area del quadrato di lato c le aree dei quattro triangoli di cateti a e b; pertanto:

$$c^2 - 4\frac{ab}{2} = (b-a)^2$$

semplificando e sviluppando: si ha: $c^2 - 2ab = b^2 - 2ab + a^2$

e aggiungendo ad ambo i membri il prodotto 2ab si ottiene:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3ª Dimostrazione

Si osservi la figura che segue; anche in questo caso il quadrato inscritto di lato c è equivalente alla differenza fra il quadrato esterno di lato a+b diminuito dei quattro triangoli uguali di cateti a e b e ipotenusa c.

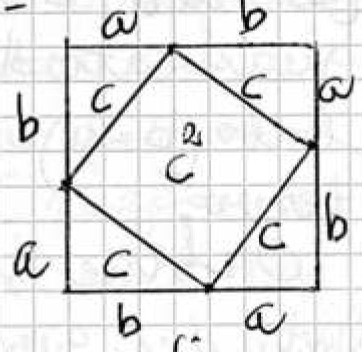


fig. 6

Allora possiamo scrivere:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2}$$

semplificando e sviluppando abbiamo:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab$$

e infine:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

4^ Dimostrazione

La dimostrazione che segue

si avvale di quanto ottenu=
to dalla dimostrazione prece=
dente.

All'uopo si osservino le
due figure che seguono:

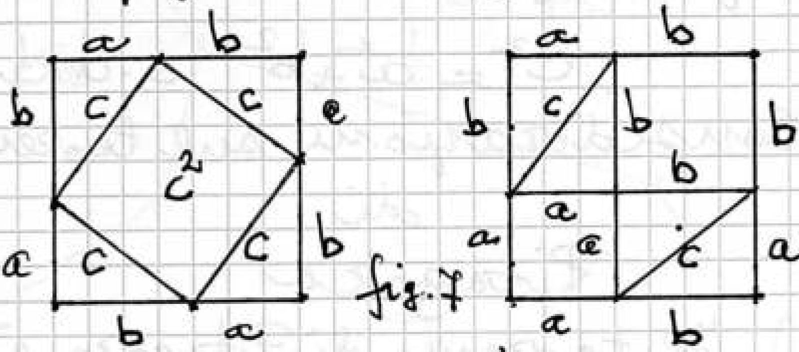


fig. 7

ed è fuori di dubbio che sono
equivalenti e formate da fi=
gure equivalenti.

Un assioma asserisce che se
da figure equivalenti vengo=
no sottratte figure equivalen=
ti si ottengono figure equi=
valenti.

Abbiamo visto nella dimo=
strazione precedente che
$(a+b)^2 - 4\frac{ab}{2} = c^2$; dall'altra

figura otteniamo che

$$(a+b)^2 - 4\frac{ab}{2} = a^2+b^2$$

Pertanto uguagliando i secondi membri delle due uguaglianze si ottiene

$$c^2 = a^2+b^2 \quad c.d.d.$$

Considerazioni sul teorema di Pitagora

1) Il teorema di Pitagora è invertibile;

2) Il teorema di Pitagora è valido anche se sui cateti e sull'ipotenusa del triangolo vengono costruite figure simili qualunque.

Dimostro il 2° caso e anche qui costruisco un triangolo rettangolo e figure simili (a contorno rettilineo o curvilineo) sui suoi lati come in figura

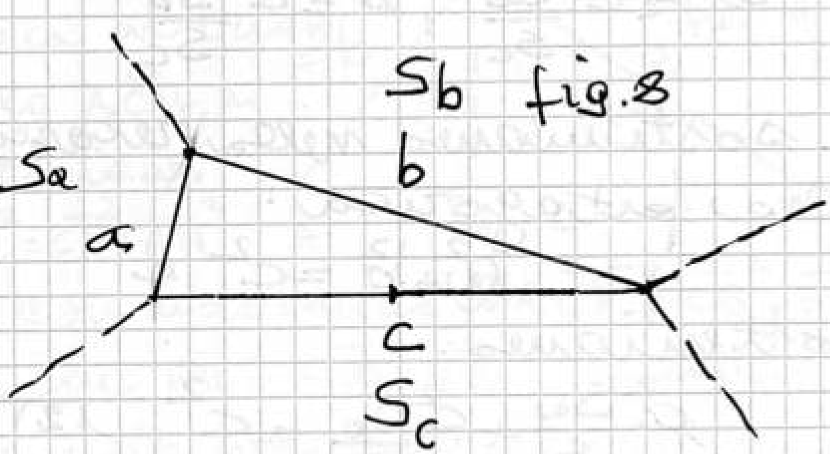


fig. 8

Abbozzate le figure costruite sui lati a, b, c del triangolo siano S_a, S_b, S_c le aree delle superfici delle figure costruite, rispettivamente, sui lati suddetti.

Allora per la similitudine abbiamo:

$$\frac{S_a}{a^2}=\frac{S_b}{b^2}=\frac{S_c}{c^2} \qquad 11)$$

Da dette uguaglianze (proporzioni) troviamo:

$$a^2 = c^2 \frac{S_a}{S_c}, \quad b^2 = c^2 \frac{S_b}{S_c}$$

sostituiamo nella relazione pitagorica:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad e$$

otteniamo:

$$c^2 \frac{S_a}{S_c} + c^2 \frac{S_b}{S_c} = c^2 \qquad 12)$$

che semplificata diventa:

$$S_a + S_b = S_c \qquad 13)$$

Tale relazione non abbisogna di essere enunciata.

Alcune applicazioni del teorema di Pitagora

1) Sia $A\hat{B}C$ un triangolo qualsiasi, supponiamo acutangolo, di lati a, b,

C e di altezza $\overline{CH}$ come in figura; applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo $\overset{\triangle}{ACH}$ e otteniamo:

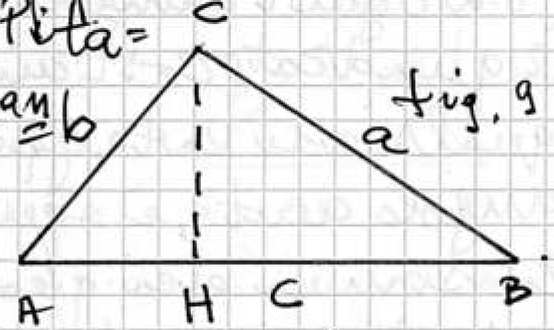


fig. 9

$$\overline{AC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2$$

e considerando che $\overline{CH}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{HB}^2$ e che $\overline{AH} = \overline{AB} - \overline{HB}$, sostituendo nella precedente uguaglianza $\overline{CH}^2$ e $\overline{AH}$, otteniamo:

$$b^2 = \overline{CB}^2 - \overline{HB}^2 + (\overline{AB} - \overline{HB})^2 =$$

$$= \overline{CB}^2 - \cancel{\overline{HB}^2} + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{HB} + \cancel{\overline{HB}^2} =$$

$$= a^2 + c^2 - 2c\overline{HB} \qquad 14)$$

Quanto ottenuto esprime il teorema di Pitagora generalizzato applicato alla misura di un lato del triangolo opposto ad un angolo acuto.

Detto teorema può essere enunciato così:

In ogni triangolo qualsiasi il quadrato costruito su un qualsiasi lato, opposto ad un angolo acuto, è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio rettangolo avente per dimensioni uno dei suddetti lati e la proiezione del secondo lato sul primo.

Nel caso che si volesse applicare tale teorema al lato opposto all'angolo ottuso di un triangolo basta che nella 14) si cambi il meno in più.

2) Triangolo rettangolo isoscile.

Sia $A\hat{B}C$ un triangolo

rettangolo isoscele di lato l e di ipotenusa i.

Poniamo:

$\overline{AC} = \overline{CB} = l$

$\overline{AB} = i$

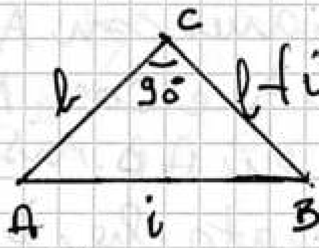


fig. 10

e applicando il teorema di Pitagora abbiamo:

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$$ e

sostituendo abbiamo:

$$2l^2 = i^2$$

da cui si ricavano le formule:

$$i = l\sqrt{2} \quad \text{o anche}$$

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2} i \qquad 15)$$

3) Triangolo rettangolo con angoli acuti di 30° e 60°

Sia $A\hat{B}C$ un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°

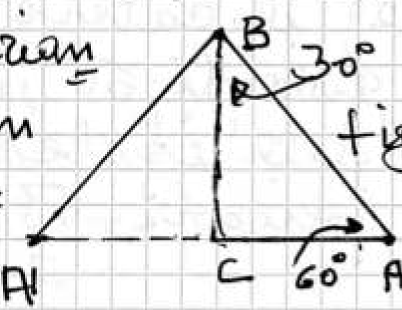


fig. 11

Ribaltiamo tale triangolo attorno alla retta BC e indichiamo con A' il simmetrico di A e con A'B il simmetrico di AB.

Dato che i triangoli $A\hat{B}C$ e $A'\hat{B}C$ sono uguali abbiamo

$\overline{A'C} = \overline{CA}$ e $\overline{AA'} = \overline{AB} = \overline{A'B}$

Pertanto risulta $\overline{A'C} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ e $\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$.

Concludiamo che:

In un triangolo rettangolo con angoli acuti di 30° e 60° risulta che:

1) il cateto opposto all'angolo di 30° misura metà dell'ipotenusa;

2) il cateto opposto all'angolo di 60° misura metà dell'ipotenusa moltiplicata $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Primo teorema di Euclide

Per evitare calcoli laboriosi risolvo il problema con dati numerici.

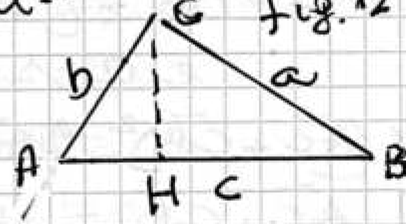


fig.12

Siano $\overline{AB} = 10$, $\overline{CH} = 4$, $\hat{C} = 90°$

S(ABC) = S (area del triangolo)

allora abbiamo:

$$S = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{CB} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 4 = 20 \qquad 16)$$

Applico il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo $A\hat{B}C$ e ottengo:

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 = 10^2 = 100 \qquad 17)$$

e associo la 16) formando il sistema:

$$\begin{cases} \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = 100 \\ \overline{AC}\cdot\overline{CB} = 40 \end{cases}$$

Applico la formula di

Werner e sostituisco

$$\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=(\overline{AC}+\overline{CB})^2-2\overline{AC}\cdot\overline{CB}$$

e il sistema diventa:

$$\begin{cases}(\overline{AC}+\overline{CB})^2-2\overline{AC}\cdot\overline{CB}=100\\ \overline{AC}\cdot\overline{CB}=40\end{cases}$$

e infine

$$\begin{cases}\overline{AC}+\overline{CB}=\sqrt{100+80}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}\\ \overline{AC}\cdot\overline{CB}=40\end{cases} \quad 18)$$

Il sistema 18) è simmetrico per cui se indichiamo con $z=\overline{AC}$ oppure $z=\overline{CB}$ ottaniamo l'equazione risolvente di 2° grado:

$$z^2-6\sqrt{5}z+40=0;$$

Calcoliamo

$$\frac{\Delta}{4}=(3\sqrt{5})^2-40=45-40=5$$

quindi

$$\begin{aligned}z_1&=3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}\\ z_2&=3\sqrt{5}+\sqrt{5}=4\sqrt{5}\end{aligned} \quad 19)$$

Siccome abbiamo supposto $\overline{AC}<\overline{CB}$ allora ab=

fiamo:

$\overline{AC} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{CB} = 4\sqrt{5} \qquad 20)$

Osserviamo ora che:

$\overline{AC}^2 = (2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$

$\overline{AB} \cdot \overline{AH} = 10 \cdot 2 = 20$

perchè $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{20 - 16} = 2$

e di conseguenza

$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = 10 - 2 = 8$

Ne risulta che:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} \qquad 21)$

Tale relazione rappresenta il 1° teorema di Euclide che si può enunciare:

"In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa."

5) Secondo teorema di Euclide.

Sia $A\hat{B}C$ il triangolo rettangolo (mi appoggio alla figura 12) e prendo $\overline{AB} = 10$, $\overline{AH} = 2$, $\overline{HB} = 8$, $\overline{CH} = 4$ e calcolo
$\overline{CH}^2 = 4^2 = 16$, $\overline{AH} \cdot \overline{HB} = 2 \cdot 8 = 16$
pertanto

$$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB} \qquad 22)$$

Detta uguaglianza esprime il secondo teorema di Euclide e si può enunciare nel seguente modo:
"In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equiva= lente al rettangolo che ha per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

6) Corollario del teorema di Pitagora

Nel corollario che segue e= spongo un mio intervento su un caso particolare del teorema adottando due procedimenti diversi

1) Per il primo procedimento ho preso lo spunto dalla successione $\{a_n = 2n-1\}$ formata da termini numeri interi dispari.

Infatti:

$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5, \ldots a_n = 2n-1;$

tale successione rappresenta una progressione aritmetica di ragione 2 pertanto, indicando con S_n la somma dei primi numeri dispari otteniamo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n^2$$

Allora partiamo da S_n e arrestiamo la somma davanti a un numero k^2 (quadrato perfetto); in tal caso otteniamo:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + k^2 = (n+1)^2$$

e sostituendo $S_n = n^2$

la precedente uguaglianza diventa:

$$n^2+k^2=(n+1)^2 \qquad 23)$$

Da qui si deduce che $n, k, n+1$ costituiscono una terna pitagorica ove

$$k^2=(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=$$
$$=2n+1 \qquad 24)$$

oppure

$$n=\frac{1}{2}(k^2-1) \qquad k\neq 1$$

Ovviamente k è un numero dispari; calcoliamo, per completare la terna

$$n+1=\frac{1}{2}(k^2-1)+1=\frac{k^2-1+2}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}(k^2+1).$$

Quindi la terna risulta:

$$k \;,\; \frac{1}{2}(k^2-1) \;,\; \frac{1}{2}(k^2+1)$$

e così abbiamo ritrovato la terna $m, \frac{1}{2}(m^2-1)\ \frac{1}{2}(m^2+1)$

proposta dai pitagorici.
Bisogna precisare che tale terna non fornisca tutti i numeri (interi) soddisfacenti l'equazione di Pitagora (vedi pag. 21 n.9) ma solo e soltanto quelle terne nelle quali la differenza fra i numeri maggiori è 1.

2) Il secondo procedimento è più immediato
Infatti basta partire dalla equazione pitagorica e porre $z = y+1$
nella $x^2+y^2=z^2$ e si ottiene:

$$x^2+y^2=(y+1)^2$$ e sviluppando:

$$x^2+y^2=y^2+2y+1$$

$$x^2=\cancel{y^2}+2y+1-\cancel{y^2}=2y+1$$

e infine $y=\frac{x^2-1}{2}$ e

$$z=y+1=\frac{1}{2}(x^2+1)$$

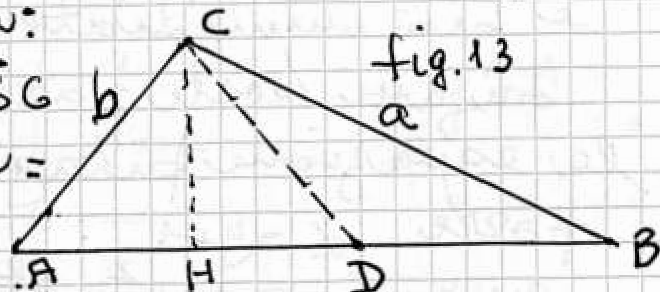
allora x, $\frac{1}{2}(x^2-1)$, $\frac{1}{2}(x^2+1)$
è la terna che abbiamo otte=
nuto nel caso precedente.

7) Problema di Stewart

Il problema di Stewart consiste nel determinare la misura del segmento che unisce il vertice di qualsia=si triangolo con un punto qualsiasi del lato opposto.

Allora:

Sia $A\hat{B}C$ un tri=angolo qualsiasi e poniamo:



$\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{CB} = a$, $CH \perp AB$

$\overline{AD} = x$, $\overline{DB} = y$, $\overline{CD} = s$,

$\overline{AD} : \overline{DB} = m : n$.

Applichiamo il teorema* generalizzato ai triangoli

* di Pitagora

$A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B$ e abbiamo:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,\overline{AD}\cdot\overline{HD}$$
$$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + 2\,\overline{DB}\cdot\overline{HD} \qquad 25)$$

e infine aggiungiamo:

$$\overline{AD} + \overline{DB} = x + y = c$$
$$\overline{AD} : \overline{DB} = m : n = x : y$$

e quindi il sistema

$$\begin{cases} x + y = c \\ x : y = m : n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = c \\ nx = my \end{cases} \qquad 26)$$

risolvendo il sistema si ottiene

$$x = \frac{cm}{m+n} \qquad 27)$$
$$y = \frac{cn}{m+n}$$

Sostituiamo nelle 25) i valori assegnati e otteniamo

$$\begin{cases} b^2 = s^2 + x^2 - 2x\,\overline{HD} \\ a^2 = s^2 + y^2 + 2y\,\overline{HD} \end{cases} \qquad 28)$$

Sfruttiamo la seconda equazione del sistema 26) scrivendola $nx - my = 0$; all'uo=

po moltiplichiamo ambo i membri della prima equazione del sistema 28) per n, e la seconda per m.

Si ottiene:

$$\begin{cases} nb^2 = ns^2 + nx^2 - 2nx\overline{HD} \\ ma^2 = ms^2 + my^2 + 2my\overline{HD} \end{cases} \quad 29)$$

e sommiamo membro a membro le 29); abbiamo:

$$ma^2 + nb^2 = s^2(m+n) + nx^2 + my^2 - 2\overline{HD}\cdot d$$

ove per esigenze di scrittura ho posto $d = nx - my$; poiché

$$d = nx - my = 0 \text{ (vedi prima)}$$

rimane

$$ma^2 + nb^2 = s^2(m+n) + nx^2 + my^2$$

oppure:

$$s^2 = \frac{ma^2 + nb^2}{m+n} - \frac{nx^2 + my^2}{m+n} \quad 30)$$

non rimane che sostituire a x e y i valori indicati nella 27).

Per facilitare il calcolo

farò una sostituzione parziale, quindi:

$$\frac{nx^2+my^2}{m+n}=\frac{n}{m+n}\,\frac{c^2m^2}{(m+n)^2}+$$

$$+\frac{m}{m+n}\,\frac{c^2n^2}{(m+n)^2}=\frac{mnc^2}{(m+n)^3}(m+n)=$$

$$=\frac{mnc^2}{(m+n)^2} \qquad 31)$$

sostituendo la 31) nella 30) infine avremo:

$$s^2=\frac{ma^2+nb^2}{m+n}-\frac{mnc^2}{(m+n)^2} \qquad 32)$$

L'importanza della 32) risiede nel fatto che con la sua applicazione si è in grado di determinare diverse grandezze a seconda dei valori attribuiti ai numeri m ed n.

Esempi:

1°) Se nella 32) poniamo $m=n$ (da cui $x=y$) è ovvio che s rappresenterà la lunghezza della mediana del triangolo relati=

va al lato $\overline{AB}=c$ del triangolo e pertanto si ottiene:

$$s^2 = \frac{na^2+nb^2}{n+n} - \frac{n^2c^2}{(n+n)^2} = \frac{(a^2+b^2)n}{2n} - \frac{n^2c^2}{4n^2} = \frac{1}{2}(a^2+b^2) - \frac{1}{4}c^2$$

come caso particolare, se il triangolo è rettangolo e c è la lunghezza della ipotenusa, si pone $a^2+b^2=c^2$ e otteniamo:

$s^2 = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2$ e infine:

$$s = \sqrt{\frac{c^2}{4}} = \frac{c}{2}.$$

2°) se nella 32) poniamo

$$x:y=b:a$$

si ricava $b:a=m:n$ e quindi $n=\frac{am}{b}$ e allora

$$s^2 = \frac{a^2m + \frac{am}{b}b^2}{m+\frac{am}{b}} - \frac{m\frac{am}{b}c^2}{\left(m+\frac{am}{b}\right)^2} = \frac{am(a+b)}{m(a+b)}\cdot b - \frac{m^2ac^2}{b\,\frac{m^2(a+b)^2}{b^2}} =$$

$$= ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b)^2 - abc^2}{(a+b)^2}$$

allora: $s^2 = \frac{ab(a^2+b^2+2ab-c^2)}{(a+b)^2}$

oppure

$s^2 = ab\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2}$ da cui

$s = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}$

Tale formula esprime la lunghezza della bisettrice dell'angolo opposto al lato $AB = c$.

pepparditta

Pacecco settembre 2015.

Litotipografia "Michele Abate"
di Vincenzo Abate
Via Calatafimi, 15 - 91027 Paceco (Tp)
info@abatetipografia.it
Ottobre 2015