Sezione Docenti

e

Cultori di Varia Umanità

CAMPI DI RAZIONALITA' E CAMPI EUCLIDEI

di Nicolò Giovannelli
(Università di Palermo)

1. Generalità.

Siano $a,b,c,...$ dei parametri cioè dei numeri indeterminati.

Chiameremo *campo di razionalità* individuato da essi e lo indicheremo con il simbolo R($a,b.c,...$) la totalità delle espressioni che si ottengono da essi operando con le quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica.

(Osserviamo che e^2 appartiene al campo di razionalità generato da e, R(e), e tale numero non è razionale.)

Stabiliamo ora, a titolo di esempio, la forma del generico elemento appartenente al campo di razionalità generato dal numero x ? 0 .

Al campo R(x) appartengono:

a) i numeri razionali;
b) le potenze di x ad esponente intero relativo;
c) i prodotti di numeri razionali per potenze di x;
d) i polinomi in x a coefficienti razionali;
e) le funzioni razionali fratte a coefficienti razionali in x.

Segue che l'elemento generico del campo R(x) è

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$$

con $b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m$? 0 e $a_0, a_1,..., a_n$, $b_0, b_1,..., b_m$ numeri razionali

Più generalmente il generico elemento del campo di razionalità generato da $a, b, c,...$ è una funzione razionale fratta nelle potenze dei parametri $a, b ,c,...$ a coefficienti razionali.

Da quanto detto è evidente che il campo R(a, b, c,...) contiene il campo dei numeri razionali relativi (campo assoluto di razionalità) cioè, come sul dirsi, R(a, b, c,...) è un sovracampo del campo assoluto di razionalità.

Il campo di razionalità R(a) si riduce al campo razionale se e solo se a è razionale. Se a non è razionale allora R(a) contiene propriamente il campo **Q** dei razionali ed esso è il "più piccolo" campo, sovracampo di **Q**, contenente a.

Il campo di razionalità generato dal numero a si dirà il *campo ampliamento semplice* di **Q** mediante l'elemento a.

Se a è zero di un polinomio in x a coefficienti razionali avente grado maggiore di zero R(a) si dirà *ampliamento semplice algebrico.*

Il numero a si dice in tal caso algebrico sopra **Q**. Se n, maggiore di zero, è il grado del polinomio canonico di a, l'ampliamento R(a) si dirà di grado n.

In tal caso l'elemento generico di R(a) è una funzione razionale intera in a e a coefficienti razionali di grado minore di n.

Chiameremo *campo euclideo* individuato dai parametri reali positivi a, b, c,... l'insieme delle espressioni che si ottengono operando su tali parametri mediante le quattro operazioni fondamentali e l'estrazione di radice quadrata.

2. Importanza dei campi di razionalità e dei campi *euclidei.*

I parametri a, b, c, ... siano *misure* di segmenti assegnati rispetto ad uno di essi (segmento unità).

Vale il seguente **teorema 2.1**:

A partire dai segmenti assegnati, si possono costruire con riga e compasso tutti i segmenti le cui misure sono numeri appartenenti al campo euclideo generato da a,b, c,... .

La più generale espressione *appartenente* al campo euclideo generato dai parametri a, b, c, ... la si può pensare ottenuta operando con le quatto operazioni aritmetiche fondamentali su espressioni

$$(2.1) \qquad \sqrt{P_2+\sqrt{P_4+\ldots+\sqrt{P_{2^n}}}}$$

con $P_2, P_4, \ldots, P_{2^n}$ polinomi in a, b, c, ...di grado $2, 4, \ldots, 2^n$ rispettivamente, espressione che possiamo ritenere omogenea di grado 1, introducendo se occorre il parametro 1, lunghezza del segmento unità.

3. Problemi geometrici

Un problema geometrico è una questione nella quale si richiede la determinazione di una o più figure geometriche (soluzioni del problema) che abbiano certe relazioni con un assegnato sistema di figure (dati del problema).

Supponiamo ora che i dati di un problema siano costituiti da un insieme finito di punti, rette e circonferenze.

Si riconosce facilmente che, con riferimento ad un sistema cartesiano, ogni figura appartenente ai dati del problema è individuata da uno o più numeri (un punto dalle sue coordinate, una retta dalle sue coordinate plukeriane, una circonferenza dal suo centro e dal raggio).

Al sistema dei dati del problema corrisponde pertanto un sistema di numeri che chiameremo parametri del problema.

Vale il **teorema 3.1**:

Condizione *necessaria e sufficiente affinché un problema geometrico sia risolubile con riga e compasso è che i parametri delle soluzioni del problema appartengano al campo euclideo dei dati.*

La condizione è ovviamente sufficiente (teorema 1).

La condizione è necessaria: Supponiamo che il problema sia risolubile con riga e compasso; le operazioni che si possono eseguire con tali strumenti sono:

a) costruzione della retta per due punti dati;
b) costruzione di una circonferenza di dato centro e dato raggio;
c) intersezione di due rette;
d) intersezione di una retta con una circonferenza;
e) intersezione di due circonferenze.

Nei riguardi della operazione a) si osservi che se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono due punti appartenenti ai dati del problema, la retta per essi ha equazione

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ossia equazione $ax + by + c = 0$ con $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1 y_2 - x_2 y_1$ e quindi essa appartiene al campo di razionalità dei dati.

Per la operazione b) osserviamo che la circonferenza di centro (a,b) e raggio r ha equazione

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

i cui coefficienti si esprimono razionalmente in a,b,r.

Nei riguardi dell'operazione c) si osservi che la determinazione delle coordinate del punto di intersezione di due rette si ottiene operando razionalmente sui coefficienti delle equazioni delle due rette (dati).

Le operazioni d) ed e) danno invece origine a punti appartenenti al campo euclideo dei dati in quanto si traducono nella risoluzione di un sistema di secondo grado di due equazioni i cui coefficienti appartengono al campo di razionalità dei dati.

Dal momento che le soluzioni del problema si ottengono a partire dai dati con un numero finito di operazioni del tipo introdotto si deduce che i parametri delle soluzioni appartengono al campo euclideo dei dati e pertanto la necessità della condizione è provata.

Supponiamo che la risoluzione di un problema sia stata ricondotta alla determinazione di una sola incognita x; se tale problema è risolubile con riga e compasso allora la x dovrà esprimersi mediante un elemento della forma

$$(3.1) \qquad x=\alpha_1\sqrt{a_1+\sqrt{b_1+....+\sqrt{c_1}}}+\alpha_2\sqrt{a_2+\sqrt{b_2+....+\sqrt{c_2}}}+...+\alpha_n\sqrt{a_n+\sqrt{b_n+....+\sqrt{c_n}}}$$

essendo α_i, a_i, b_i, c_i elementi appartenenti al campo di razionalità dei dati.

E' intuitivo, ma potrebbe dimostrarsi rigorosamente, che con opportune elevazioni al quadrato e con operazioni razionali, è possibile eliminare dalla (3.1) i radicali. Si perviene così ad una equazione algebrica i cui coefficienti appartengono al campo di razionalità dei dati.

Possiamo quindi enunciare il seguente **teorema 3.2**:

Se un problema è risolubile con riga e compasso le coordinate dei punti incogniti soddisfano ad equazioni (ad una incognita) *algebriche i cui coefficienti sono elementi del campo di razionalità dei dati.*

Definizione 3.1: *Un problema si dice algebrico quando esso si può tradurre in una equazione algebrica a coefficienti appartenenti al campo di razionalità dei dati.*

I problemi non algebrici si dicono trascendenti.

Da quanto detto discende che i problemi risolubili con riga e compasso sono problemi algebrici; pertanto i problemi trascendenti non sono risolubili con riga e compasso.

Ovviamente non tutti i problemi algebrici sono risolubili con riga e compasso.

4. Un criterio necessario per la risolubilità di un problema con riga e compasso.

Definizione 4.1: *Una equazione algebrica a coefficienti reali o complessi si dice* ***risolubile per radicali quadratici*** *quando le sue radici si ottengono eseguendo sui coefficienti dell'equazione un numero finito di operazioni razionali e di estrazione di radici quadrate cioè se le sue radici appartengono al campo euclideo dei coefficienti.*

E' notevole la circostanza che se un'equazione algebrica è irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti e una sua radice appartiene al campo euclideo dei coefficienti, allora tutte le altre sue radici appartengono al campo euclideo dei coefficienti e quindi l'equazione è risolubile per radicali quadratici.

Fondamentale è il seguente **teorema** dovuto a **Petersen**

Teorema 4.1. *Condizione necessaria perché una equazione algebrica irriducibile nel campo di razionalità dei suoi coefficienti sia risolubile per radicali quadratici è che il suo grado sia una potenza di due*

Da quanto si è detto circa la possibilità di costruire con riga e compasso tutti e soltanto gli elementi appartenenti al campo euclideo dei dati, discende che un problema geometrico è risolubile con riga e compasso se e solo se l'equazione algebrica risolvente è una equazione algebrica risolubile per radicali quadratici. Segue che se una equazione risolvente un problema geometrico è trascendente ovvero è una equazione irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti e di grado non potenza di due, il problema in esame non è risolubile con riga e compasso.

Con riferimento alla irriducibilità delle equazioni algebriche a coefficienti interi è spesso utile il seguente **Teorema di Einsestein**:

Se l'equazione algebrica

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

ha i coefficienti interi relativi tutti divisibili per il numero primo p tranne a_0 *ed inoltre* a_n *non è divisibile per* p^2 *allora tale equazione è irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti (campo assoluto di razionalità).*

Alla dimostrazione del teorema di Einsestein premettiamo il seguente **Lemma di Gauss**:

Se un polinomio a coefficienti interi è riducibile nel campo assoluto di razionalità esso si può decomporre nel prodotto di due polinomi (di grado maggiore di zero) a coefficienti interi.

Dim.

Supponiamo che il polinomio $F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ a coefficienti interi sia riducibile in **Q.**

Si può allora scrivere $F(x) = \Phi(x) ? \Psi(x)$ essendo $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ polinomi di grado maggiore di zero a coefficienti razionali. Riducendo i coefficienti sia di $\Phi(x)$ che di $\Psi(x)$ al minimo denominatore comune si ha:

(4.1) $$F(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\alpha} ? \frac{\Psi_1(x)}{\beta}$$

essendo $\Phi_1(x)$ e $\Psi_1(x)$ funzioni a coefficienti interi ed α e β interi positivi tali che il primo non abbia divisori comuni con tutti i coefficienti di $\Phi_1(x)$ e il secondo non abbia divisori comuni con tutti i coefficienti di $\Psi_1(x)$ (possiamo fare in modo che α e β risultino primi con i coefficienti di entrambi i polinomi).

Dimostriamo che in tali condizioni risulta $\alpha = \beta = 1$.

Supponiamo, per assurdo, che sia $\alpha > 1$ e p un divisore primo di α ; poiché non tutti i coefficienti di $\Phi_1(x)$ né tutti quelli di $\Psi_1(x)$ sono divisibili per p , raccogliendo gli eventuali termini di $\Phi_1(x)$ e di $\Psi_1(x)$ i cui coefficienti sono divisibili per p si ha:

$$\Phi_1(x) = p\Phi_2(x) + \Phi_3(x) \quad , \quad \Psi_1(x) = p\Psi_2(x) + \Psi_3(x),$$

dove $\Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Psi_2$ sono polinomi a coefficienti interi, $\Phi_3(x)$ e $\Psi_3(x)$ non identicamente nulli e senza coefficienti divisibili per p.

Sostituendo in (1) si ottiene

$$F(x) = \frac{p\Phi_2(x) + \Phi_3(x)}{\alpha} ? \frac{p\Psi_2(x) + \Psi_3(x)}{\beta},$$

da cui

$$\alpha\beta F(x) - p^2 \Phi_2(x)\Psi_2(x) - p[\Phi_2(x)\Psi_3(x) + \Phi_3(x)\Psi_2(x)] = \Phi_3(x)\Psi_3(x)$$

Tutti i coefficienti del polinomio a primo membro sono divisibili per p, e lo stesso, per l'identità dei polinomi, dovrebbe avvenire per il secondo, mentre ad esempio il coefficiente del termine di grado massimo di esso non è divisibile per p.

Concludendo è assurdo supporre $\alpha > 1$ e analogamente è assurdo supporre $\beta > 1$, deve quindi essere $\alpha = \beta = 1$.

Dalla dimostrazione segue inoltre che se i coefficienti di $\Phi(x)$ sono primi tra loro anche $\Psi(x)$ ha i coefficienti interi.

Dimostriamo ora il **teorema** di **Einsestein**.

Consideriamo il polinomio

(4.2) $$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

ed esso abbia tutti i coefficienti tranne a_0 divisibili per il numero primo p e inoltre sia a_n non divisibile per p^2, supponiamo che tale polinomio sia riducibile, si potrà allora scrivere:

$F(x) = \Phi(x)\Psi(x)$ con $\Phi(x) = \alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + ... + \alpha_r$ e $\Psi(x) = \beta_0 x^s + ... + \beta_s$ r ? 1, s ? 1 polinomi a coefficienti interi.

Poiché a_0 non è divisibile per p ed è $a_0 = \alpha_0$?β_0, si deduce che né α_0 né β_0 sono divisibili per p, e dal momento che è $a_n = \alpha_r$?β_s per l'ipotesi uno soltanto dei fattori che compongono a_n è divisibile per p, sia esso α_r.

Dal momento che p divide α_r e non tutti i coefficienti di $\Phi(x)$, sia α_k il coefficiente di indice massimo non divisibile per p $(0 \le k < r)$.

Allora possiamo porre $\Phi(x) = \Phi_k(x) + p\Pi(x)$, essendo

$$\Phi_k(x) = \alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + ... + \alpha_k x^{r-k}$$

e

$$\Pi(x) = \frac{\alpha_{k+1}}{p} x^{r-k-1} + ... + \frac{\alpha_r}{p}.$$

Allora si ha

$$F(x) = \Phi_k(x)\Psi(x) + p\Pi(x)\Psi(x)$$

e se ne deduce che il coefficiente di x^{r-k}

$$\alpha_k \beta_s + \alpha_{k+1}\beta_{s-1} + ...$$

non è divisibile per p; ma ciò è assurdo poiché tale coefficiente, essendo r-k<n, è, per ipotesi, divisibile per p. Pertanto la (4.2) è irriducibile.

I PROBLEMI CLASSICI DELL'ANTICHITA'

Si chiamano problemi dell'antichità i seguenti problemi geometrici:

a. *Duplicazione del cubo.*

   Esso consiste nel costruire, a partire da un assegnato segmento a, un segmento b tale che il cubo di spigolo b abbia volume doppio del cubo di spigolo a;

b. *Trisezione dell'angolo.*

   Esso consiste nel costruire, a partire da un dato angolo, un angolo che sia la terza parte dell'angolo dato;

c. *Rettificazione della circonferenza.*

   Esso consiste nel costruire, a partire dal raggio di una circonferenza, un segmento un segmento uguale al segmento rettificante la circonferenza.

Gli antichi affrontarono questi problemi, allo scopo di risolverli con riga e compasso, ma invano tentarono di riuscirvi con i suddetti strumenti. Passarono più di duemila anni dall'opera di Euclide prima che si potesse dare, in merito, una risposta definitiva.

Ci proponiamo di dimostrare che i problemi classici dell'antichità non sono risolubili elementarmente cioè con riga e compasso.

Osserviamo che con riferimento al problema della trisezione dell'angolo dire che esso non è risolubile con riga e compasso non esclude la possibilità di potere trisecare elementarmente angoli particolari, ma nella classe degli angoli, ovviamente non numerabile, quelli trisecabili elementarmente sono una infinità numerabile.

a. Duplicazione del cubo.

Come detto tale problema consiste, dato lo spigolo di un cubo, nel trovare lo spigolo del cubo di volume doppio.

Indichiamo con AB lo spigolo del cubo assegnato ed assumiamo tale segmento come unitario, allora detto x lo spigolo del cubo di volume doppio dovrà essere $x^3 = 2$ o equivalentemente

(1) $$x^3 - 2 = 0\,;$$

tale equazione, come si riconosce facilmente, è irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti, cioè nel campo assoluto di razionalità. Infatti se essa fosse riducibile nel campo assoluto di razionalità il polinomio a primo membro della (1) dovrebbe scomporsi nel prodotto di due polinomi a coefficienti razionali di cui uno di primo grado.

Allora l'equazione (1) dovrebbe avere una radice intera essendo il coefficiente della potenza massima uguale ad 1 e la stessa deve, se esiste, essere un intero divisore del termine noto della (1), ma nessuno dei divisori di 2 è radice dell'equazione, pertanto la (1) è irriducibile.

Da ciò segue, non essendo il grado della (1) potenze di due, che essa non è risolubile per radicali quadratici (la irriducibilità della (1) poteva dedursi dal teorema di Eisestein).

a. *Trisezione dell'angolo.*

Si è detto che il problema della trisezione dell'angolo consiste nel costruire a partire da un angolo assegnato un angolo terza parte di questo.

Osservato che se un angolo è costruibile con riga e compasso lo è anche la sua tangente, il problema sopra posto è equivalente al seguente:

Assegnata la tangente di un angolo φ ,determinare la tangente dell'angolo $\frac{\varphi}{3}$.

Posto $h = \tan\varphi$ il problema consiste nel determinare $x = \tan\frac{\varphi}{3}$.

Essendo $\tan\varphi = \dfrac{3\tan{}^{\varphi}\!/_{3} - \tan^3{}^{\varphi}\!/_{3}}{1-3\tan^2{}^{\varphi}\!/_{3}}$ si perviene all'equazione algebrica di terzo grado

$$(2) \qquad x^3 - 3hx^2 - 3x + h = 0\,.$$

Poiché il grado di tale equazione non è potenza di due, in corrispondenza dei valori del parametro h per i quali essa risulta irriducibile nel campo di razionalità generato da h il problema posto non è risolubile con riga e compasso. Per i valori del parametro h per i quali tale equazione è riducibile nel campo di razionalità generato da h il problema è risolubile con riga e compasso in quanto l'equazione si decompone nel prodotto di un polinomio di primo grado per un polinomio di secondo grado a coefficienti appartenenti al campo di razionalità generato da h.

Da quanto detto segue che:

Condizione necessaria e sufficiente perché assegnato un angolo φ *esso sia trisecabile elementarmente è che posto* $h = \tan\varphi$ *l'equazione* $x^3 - 3hx^2 - 3x + h = 0$ *ammetta almeno una soluzione appartenente al campo di razionalità generato da h.*

Esempi:

(a) L'angolo $\varphi = \frac{\pi}{4}$ è trisecabile (elementarmente) infatti essendo h=1 la (2) è $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ ed essa è decomponibile nel campo di razionalità dei coefficienti (nel campo assoluto di razionalità) e riesce

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1)$$

Gli zeri dell'equazione sono: $x_1 = -1, x_2 = 2 + \sqrt{3}, x_3 = 2 - \sqrt{3}$ che, essendo numeri appartenenti al campo euclideo generato da 1, sono costruibili con riga e compasso; osserviamo che il nostro problema è risolto da x_3 .

(b) Sia ora $h = tan\varphi = 2$ e quindi $\varphi = arctg2$ l'angolo da trisecare, la (2) diventa $x^3 - 6x^2 - 6x + 2 = 0$ ma tale equazione non ha soluzioni appartenenti al campo di razionalità dei coefficienti (osserviamo che in questo caso le eventuali radici razionali dovrebbero essere numeri interi divisori del termine noto), pertanto essa è irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti e quindi, non essendo il suo grado potenza di due, non è risolubile per radicali quadratici, il che implica che l'angolo $\varphi = arctg2$ non è trisecabile elementarmente.

Da questo teorema discende il seguente teorema di **Rosati:**

Condizione necessaria affinché un angolo sia trisecabile con riga e compasso è che la sua tangente sia un numero algebrico (cioè soluzione di una equazione algebrica a coefficienti interi).

Dimostrazione. Se l'angolo φ è trisecabile elementarmente abbiamo provato che l'equazione (2) ammette una radice appartenente al campo di razionalità generato da h. Detta x una tale radice, risulta $x = \frac{P(h)}{Q(h)}$ con $P(h)$ e $Q(h)$ polinomi in x a coefficienti razionali.

Poiché x è soluzione della (2) si deduce che

$$\frac{P(h)}{Q(h)}^3 - 3h\,\frac{P(h)}{Q(h)}^2 - 3\frac{P(h)}{Q(h)} + h = 0$$

ossia

$$P^3(h) - 3hP^2(h)Q(h) - 3P(h)Q^2(h) + hQ^3(h) = 0.$$

Essendo P e Q polinomi a coefficienti razionali segue che h è soluzione dell'equazione algebrica a coefficienti razionali

$$P^3(x) - 3hP^2(x)Q(x) - 3P(x)Q^2(x) + xQ^3(x) = 0$$

cioè h è algebrico.

I numeri algebrici costituiscono un sottocampo numerabile del campo dei complessi pertanto gli angoli non risecabili elementarmente sono una infinità non numerabile e pertanto il problema della trisezione dell'angolo non è risolubile elementarmente.

b. *Rettificazione della circonferenza.*

Come detto il problema della rettificazione della circonferenza consiste nel determinare, dato il raggio, che possiamo sempre assumere come segmento unitario, il segmento rettificante la circonferenza.

Il segmento rettificante la circonferenza ha, per quanto detto, lunghezza 2π ed esso è costruibile non appena è costruito il segmento di lunghezza π .

Sappiamo che a partire dal segmento di lunghezza 1 è possibile con riga e compasso costruire i segmenti appartenenti al campo euclideo generato da 1, pertanto, la eventuale risolvibilità del problema si traduce nell'appartenenza di π al campo euclideo generato da 1. In base a ciò π dovrebbe essere soluzione di una equazione algebrica a coefficienti interi e quindi numero algebrico.

Il numero π è però trascendente e quindi non può essere soluzione di una tale equazione.

La non algebricità di π è conseguenza del seguente *Teorema* (Lindemann) :

Qualunque siano i numeri algebrici distinti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ *e i numeri interi relativi* $z_1, z_2, ..., z_k$ *non contemporaneamente nulli risulta*

$$z_1 e^{\lambda_1} + z_2 e^{\lambda_2} + ... + z_k e^{\lambda_k} \ ? \ 0.$$

Infatti si ha, come è noto, $e^{i\pi} + 1 = 0$ ossia $e^{i\pi} + e^0 = 0$ ed essendo i numeri $i\pi$ e 0 distinti, per il teorema di Lindemann (seconda forma), non possono essere entrambi algebrici ed essendo 0 algebrico non è algebrico $i\pi$ ed essendo i algebrico segue che π è trascendente).

Abbiamo così provato che i problemi classici dell'antichità non si possono risolvere elementarmente, ciò però non vuol dire che essi non possano risolversi utilizzando altri strumenti che non siano riga e compasso.

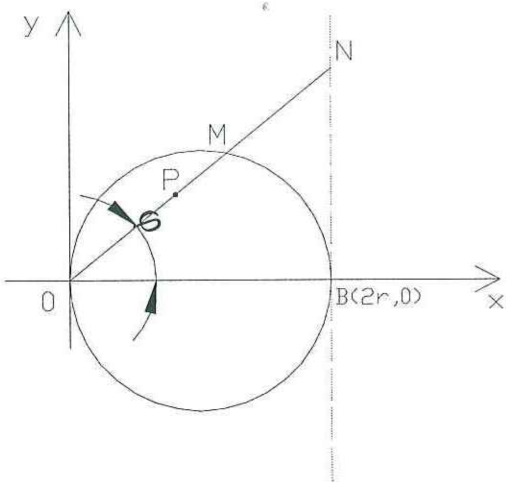
Metodi di risoluzione dei problemi classici dell'antichità.

Duplicazione del cubo.

Il problema della duplicazione del cubo può, ad esempio, essere risolto con l'uso della riga e compasso e con l'uso di un apparecchio capace di costruire la *cissoide di Diocle* (II-I secolo A.C.).

La cissoide si può generare come segue: fissata una circonferenza di centro C, si consideri una tangente a tale circonferenza e la si fissi (si assuma tale retta come asse delle ordinate e il punto di tangenza quale origine del sistema di riferimento, l'asse delle ascisse lo si orienti da O verso C).

Per ogni retta s uscente da O si denoti con M l'ulteriore intersezione di tale retta con la circonferenza e con N l'intersezione di s con la tangente alla circonferenza nel secondo estremo del diametro contenente O; si riporti su s a partire da O il segmento OP uguale al segmento MN (OP concorde con MN). La cissoide è il luogo descritto dal punto P al variare di s attorno ad O.



Considerato il sistema polare associato al sistema cartesiano, indicato con r il raggio della circonferenza, si ha:

$$\rho = \overline{OP} = \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$$

ed essendo

$$ON = \frac{2r}{\cos\varphi}, OM = 2r\cos\varphi \quad \text{è} \quad \rho = \frac{2r}{\cos\varphi} - 2r\cos\varphi$$

da cui $\rho\cos\varphi = 2r sen^2\varphi$.

La *cissoide* di *Diocle* ha dunque equazione cartesiana

$$\left(x^2 + y^2\right)x - 2ry^2 = 0.$$

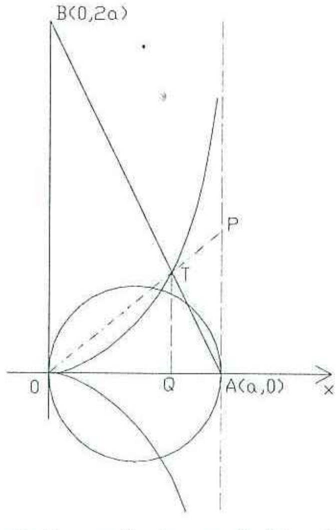
Vediamo ora come è possibile utilizzare la cissoide per risolvere il problema della duplicazione del cubo.

Si indichi con a la lunghezza delle spigolo di un cubo e si consideri la cissoide relativa alla circonferenza di diametro a, essa avrà equazione

(3) $$\left(x^2 + y^2\right)x - ay^2 = 0.$$

Indicato con A il punto di coordinate $(a,0)$ e fissato sull'asse delle ordinate il punto $B(0,2a)$ sia T l'intersezione della retta AB con la cissoide. Detto P il punto di intersezione della retta OT con la tangente in A alla circonferenza, il segmento AP risolve il problema della duplicazione del cubo di spigolo a, cioè risulta:

$$\overline{AP}^3 = 2a^3.$$



Infatti, indicata con Q la proiezione di T sull'asse delle ascisse, si ha $\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{QT} : \overline{QA}$ e quindi, indicate con (x,y) le coordinate di T (soddisfacenti all'equazione della cissoide), si ha: $2a : a = y : a - x$ cioè

(4) $$2 = \frac{y}{a-x}.$$

Dalla (3) si ricava $\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{x}{a - x}$ da cui $\dfrac{y^2}{x^3} = \dfrac{1}{a - x}$ e, tenendo conto della (4), si ha:

$$\text{(5)} \qquad \frac{y^3}{x^3} = 2 \ .$$

Dalla similitudine dei triangoli OQT e OAP si ricava:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \quad \text{cioè} \quad \frac{y}{x} = \frac{\overline{AP}}{a} \quad \text{e quindi} \quad \frac{y^3}{x^3} = \frac{\overline{AP^3}}{a^3}$$

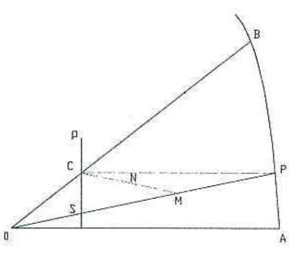
e dalla (5) si ottiene $\overline{AP}^3 = 2a^3$.

Trisezione dell'angolo.

Il problema della trisezione dell'angolo può essere risolto con l'uso della *concoide di Nicomede* (II secolo A.C.) o *concoide di una retta.*

Assegnato un punto O ed una retta r fuori da esso si consideri la generica retta s per O e si indichi con S l'intersezione di tale retta con la retta r; sia P il punto appartenente ad s, posto dalla stessa parte di S rispetto ad O, tale che $\overline{SP} = d$, la *concoide di Nicomede* è il luogo descritto da P al variare di s attorno ad O.

Sia dunque $A\hat{O}B$ l'angolo che si vuole risecare; si indichi con C un punto preso ad arbitrio sul lato OB $(C \ ? \ O)$, si conduca per C la retta, r, perpendicolare al lato OA e si costruisca la *concoide* della retta r rispetto ad O di parametro $2\overline{OC}$.



Condotta da C la parallela ad OA, sia P il punto in cui questa incontra la concoide. L'angolo $A\hat{O}P$ è la terza parte dell'angolo assegnato.

Infatti, detto S il punto di intersezione della OP con la retta r ed M il punto medio del segmento di estremi S e P, risulta:

$$MC = MP = MS = OC.$$

Inoltre si ha:

$$M\hat{C}P = M\hat{P}C = P\hat{O}A; \; C\hat{O}M = C\hat{M}O = 2M\hat{P}C$$

ossia

$$C\hat{O}M = 2P\hat{O}A.$$

Da cui segue

$$P\hat{O}A + 2P\hat{O}A = A\hat{O}B$$

ossia:

$$P\hat{O}A = \frac{A\hat{O}B}{3}.$$

Rettificazione della circonferenza.

Il problema della rettificazione della circonferenza si può risolvere con l'uso della *quadratrice di Dimostrato* (IV secolo A.C.).

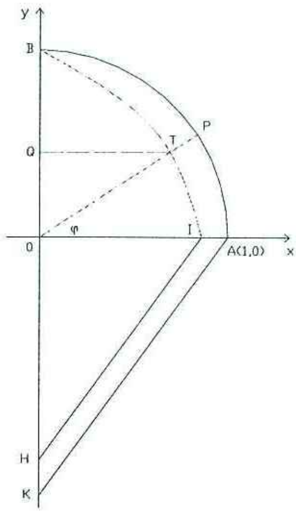
La quadratrice può pensarsi generata come segue:

Si fissi un quadrante di circonferenza di centro O e limitato dai raggi OA, OB (ovviamente perpendicolari).

Siano poi P e Q due punti che partano nello stesso istante, il primo dal punto A e il secondo da O e tali che movendosi di moto uniforme rispettivamente sull'arco AB e sul raggio OB giungano in B nello stesso istante.

Dette P e Q le posizioni raggiunte dai due punti nello stesso istante, si denoti con T l'intersezione della parallela condotta da Q alla OA con il raggio OP. Il luogo dei punti T è la quadratrice di Dinostrato.

Determiniamo ora l'equazione di tale curva supponendo il raggio della circonferenza uguale ad uno ed assumendo come asse delle ascisse la retta OA e come asse delle ordinate la retta OB.



Si ha, denotando con x ed y le coordinate di T,

$$\overline{OB} : \overline{OQ} = AB : AP \qquad \text{ossia} \qquad 1 : y = \frac{\pi}{2} : \varphi$$

essendo φ l'angolo $A\hat{O}P$ espresso in radianti.

Pertanto risulta

$$y = 2\frac{\varphi}{\pi} \quad \text{e} \quad x = y \cot g\varphi = 2\frac{\varphi}{\pi}\cot g\varphi .$$

Il punto di intersezione della curva con l'asse delle ascisse è il punto P tale che

$$\overline{OP} = \lim_{\varphi,0} x = \lim_{\varphi,0} 2\frac{\varphi}{\pi}\cot g\varphi = \frac{2}{\pi}\lim_{\varphi,0}\frac{\varphi}{sen\varphi}\cos\varphi = \frac{2}{\pi} .$$

Dalla proporzione $\frac{2}{\pi} : 1 = 1 : \frac{\pi}{2}$ si deduce la costruzione del segmento $\overline{OR}$ di lunghezza $\frac{\pi}{2}$ a partire dal segmento $\overline{OP}$, il segmento $4\overline{OR}$ è quindi il segmento rettificante la circonferenza data.

Giovannelli Nicolò
(università di Palermo)