IL FARDELLA

Rassegna di cultura e vita scolastica

" omnes artes, quae ad humanitatem pertinent, habent quoddam commune vinculum et quasi cognatione quadam inter se continentur "

Cicerone : pro Archia

numero 2

Liceo Scientifico " V. Fardella " Trapani

IL FARDELLA

Rassegna di cultura e vita scolastica

Il Fardella, al suo secondo numero, rivela una vitalità culturale nuova.

La partecipazione di insigni studiosi, di docenti, di cultori di varia umanità ha convinto la redazione a perseguire con maggiore energia ed entusiasmo l'obiettivo che la rivista si è proposto dall'inizio: essere una palestra di idee, di opinioni, di ricerca per quanti intendano animare il dialogo culturale tra le generazioni. Si tratta, infatti, di una pubblicazione che sa e vuole guardare ai giovani per valorizzarne le risorse mentali, capirne le scelte, indirizzarne l'orientamento attraverso il confronto e gli exempla suggeriti dagli adulti.

In questo senso, la redazione ringrazia quanti operano nel campo della cultura per il loro prezioso contributo e, allo stesso tempo, incoraggia i giovani a considerare Il Fardella un'opportunità in più che consente loro di considerarsi cittadini del regno della parola e non solo della pura immagine virtuale.

La redazione

ERRATA CORRIGE

<u>**Pag. 71**</u> : inserire all'inizio della pagina la seguente frase "Le forze che si esercitano sui due corpi (legge della gravitazione) sono:"

<u>**Pag. 71**</u> : inserire alla fine della pagina l'espressione:

"3) $\ddot{\vec{r}} = -K\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ dove K = costante gaussiana $= \dfrac{\gamma}{\mu} = G(M+m)$."

<u>**Pag. 72**</u> : inserire alla fine della pagina l'espressione: "$\vec{l}$ condotto per O. In altre parole il moto di un pianeta, quale deriva dalla legge della gravitazione universale, avviene in un piano, di cui fa parte il sole. Continuando nella nostra analisi, poiché i moti centrali sono piani, "

Pag.77: inserire all'inizio della pagina l'espressione:"in cui interviene la costante gaussiana K, dipendente dalla massa del pianeta e in cui si nota la relazione $T \propto a^{3/2}$ (terza legge cinematica di"

<u>**Pag.78**</u> : inserire all'inizio della pagina l'espressione: "nel campo della meccanica quanto la profondità con cui egli analizzò le implicazioni di ogni sua idea. Pur non potendo mai provare del tutto la"

Pag. 86 : inserire nella ventesima riga al posto di "_t" **Δt**

Pag. 86 :inserire nella ventottesima riga al posto di "_" **v**

Pag. 96 : 8° Rigo
inserire "chissà per chi si celebra"
al posto di "chissà per che si celebra"

Sezione Docenti

e

Cultori di

Varia Umanità

I Fardella tra consenso e dissenso

Quella dei Fardella, famiglia di araldica assai remota e, per molti secoli, di indiscussa primazia civile, costituisce una storia, una prosopografia, che ha il ritmo temporale e l'epica ambigua di una vera e propria saga, formata dai fasti della iniziale opulenza ed egemonia politica, e dalle successive "cadute" generazionali, con le rivalse patriottiche del secolo XIX e gli allori sbiaditi della memoria erudita degli ultimi eredi.

Nelle epigrafi cittadine e nella onomastica di scuole e strade il riferimento ai Fardella è ora aulico itinerario di ricordi, che riporta alla mente, insieme coi profili dei personaggi, un immaginario, eroico passato della Trapani che fu. Se il Liceo Scientifico è intitolato a Vincenzo Fardella, e al Torrearsa l'antica via dei Corallai; se la via Giovan Battista Fardella è l'arteria principale della nuova Trapani, e allo stesso nome (Giovan Battista) richiama la Biblioteca Fardelliana, vuol dire che Trapani ha voluto onorare i suoi figli migliori (nomina numina), così ricordando l'antica famiglia dei Fardella, venuta in Sicilia con le armi del conquistatore normanno, e poi distintasi negli anni per memorabili imprese guerriere, politico reggimento e prestigio di studi.

E invece la toponomastica cittadina rende merito soltanto a un ramo, l'ultimo, dei Fardella, quello dei Torrearsa, elevato al rango di marchesi e conti dal re sabaudo Vittorio Amedeo nel suo breve dominio settecentesco, mentre la città ha ignorato tutti i rappresentanti dell'altro più antico ramo, quello dei Mokarta, insieme con gli altri rami collaterali. E non solo i condottieri e i reggitori della Universitas, ma anche i grandi intellettuali e i martiri della libertà, che pure acquisirono titoli di nobiltà morale per il loro ingegno e per il loro sacrificio.

Anzitutto Michelangelo Fardella, tra i maggiori esponenti del pensiero filosofico del Seicento, amico di Leibnitz e studioso di Cartesio; e Giacomo Fardella Calvello, patrocinatore degli interessi dell'artigianato trapanese nella rivolta del 1672-73 contro il patriziato e il potere spagnolo. Michelangelo, profugo a Messina (dove fu alla scuola del grande matematico Giovanni Alfonso Borelli) e poi a Venezia e a Parigi, subì per le sue idee l'inquisizione del Tribunale ecclesiastico; mentre Giacomo fu decapitato absque pompa nel piano di Sant'Agostino per essere stato a capo della rivolta, non ostante la difesa che di lui fecero le donne delle Putielle per non farlo arrestare dagli armigeri spagnoli.

La rimozione di questi due nomi dalla memoria degli eruditi locali non fu certamente casuale, perché la rimozione avvenne da parte della stessa famiglia che, tra il Cinque e il Seicento, era ascesa ai fasti del potere feudale nel fedele servizio al viceregno spagnolo. Quelle due pecore nere della famiglia non potevano avere, quindi, ricordo alcuno.

Se ai Torrearsa fu, in pratica, dedicata per indiscutibili meriti la città - e soprattutto ai due Giovan Battista, lo zio, ministro del Borbone e benemerito mecenate, e il sindaco postunitario per aver promosso l'espansione della città al di fuori delle vecchie mura di levante; nonché Vincenzo, patriota illustre nel '48 e presidente del Senato del Regno d'Italia - non si capisce, però, come non si sia dedicato al più grande degli intellettuali trapanesi, a Michelangelo Fardella, una istituzione scolastica.

I Fardella di Torrearsa, gratificati della memoria onomastica di vie e istituzioni, furono artefici del liberalismo patriottico (soprattutto Vincenzo) e promotori di opere pubbliche, in un arco di tempo che segna la preparazione e il conseguimento dell'indipendenza e dell'Unità. Questa loro indiscussa leadership morale ed etico-civile si conclude, negli anni '70 del secolo scorso, con la caduta della Destra Storica, che essi rappresentarono nelle istituzioni locali (Giovan Battista ed Enrico, insieme a Stefano Mokarta, furono sindaci di Trapani tra il 1860 e il '74) e in quelle nazionali.

Il ramo Mokarta si esaurì con l'ultimo, Stefano, alla fine dell'Ottocento, Ma un altro ramo, quello antico dei Principi di San Lorenzo e di Paceco, declinò assai prima, nel '600, quando per il matrimonio dell'ultima discendente, Maria, tutti i beni del casato passarono ai Sanseverino.

La saga dei Fardella, tra le ambigue manovre del servizio al potere e le accensioni del dissenso intellettuale, fino all'eresia e alla rivolta, si può dire sia giunta alla sua conclusione con la morte dei tre Fardella di Torrearsa. E come tutte le storie delle grandi famiglie ha lasciato nei segni del passato il proprio lessico (per usare una espressione di Natalia Ginzburg), il proprio modo d'intendere il rapporto tra pubblico e privato.

Salvatore Costanza

Numeri Algebrici

Un numero reale o complesso si dice algebrico se è radice di una equazione algebrica a coefficienti razionali e quindi interi come è sempre lecito supporre, pertanto un numero è algebrico se è zero di un polinomio non nullo a coefficienti razionali.

Ovviamente ogni numero algebrico è soluzione di infinite equazioni algebriche a coefficienti razionali; tra tutte le equazioni algebriche a coefficienti razionali che hanno a come soluzione se ne scelga una di grado minimo e supponiamo che essa abbia coefficienti interi primi tra loro (condizione che può sempre realizzarsi), tale equazione è univocamente determinata da a ed è irriducibile nel campo razionale.

L'equazione algebrica di grado minimo a coefficienti interi primi fra loro corrispondente al numero algebrico a dicesi *equazione canonica* di a e il grado di questa equazione si dice grado di a.

Se l'equazione canonica di a ha grado maggiore di uno essa ammette, oltre alla soluzione a, altre soluzioni che sono ancora numeri algebrici che si dicono *numeri algebrici coniugati* ad a.

<u>*Teorema*</u>

Se un polinomio g(x) a coefficienti razionali si annulla per $x = a$ *esso si annulla anche per* $x = a_i$, *essendo* a_i *uno qualunque dei coniugati di* a.

Dimostrazione. Se $f(x)$ è l'equazione canonica di a il polinomio $g(x)$ è divisibile per $f(x)$ e quindi si annulla per tutte le soluzioni di $f(x)=0$.

Osservazioni:

(1) Ogni numero razionale $\frac{p}{q}$ (con p e q interi relativi primi tra loro) è un numero algebrico esso è infatti soluzione dell'equazione a coefficienti interi (equazione canonica) $qx - p = 0$.

(2) $\sqrt{2}$ è algebrico di grado 2 e la sua equazione canonica è $x^2 - 2 = 0$, il coniugato di $\sqrt{2}$ è $-\sqrt{2}$, essendo $\sqrt{2}$ irrazionale possiamo concludere

che l'insieme dei numeri algebrici contiene propriamente l'insieme dei numeri razionali.

(3) I numeri immaginari puri i e $-i$ sono algebrici coniugati di grado 2 infatti il loro polinomio canonico è $x^2+1=0$.

(4) Dalle osservazioni (2) e (3) si potrebbe essere indotti a pensare che l'insieme dei numeri algebrici contenga almeno tutti gli irrazionali (quindi i reali, vedi osservazione (1)) ciò è falso infatti, ad esempio, come proveremo più avanti, i numeri irrazionali $\pi^{(*)}$ ed e non sono numeri algebrici (vedi conseguenze dei teoremi di Lindemann).

(*) Riportiamo di seguito una dimostrazione, la più semplice, della irrazionalità di π, dimostrazione che si deve a I.Niven (1947).

Consideriamo la funzione ausiliaria (polinomio di grado $2n$) nelle indeterminate a e b

$$f_n(x)=\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}=\left(\frac{a^n}{n!}\right)x^n-\frac{a^{n-1}b}{(n-1)!}x^{n+1}+\binom{n}{2}.\frac{a^{n-2}b^2}{n!}x^{n+2}+\ldots+(-1)^n\frac{b^n}{n!}x^{2n}$$

che si annulla per $x=0$ e per $x=\frac{b}{a}$ ed entrambi tali zeri hanno molteplicità n, per essa inoltre si ha $f_n(x)=f_n\left(\frac{a}{b}-x\right)$.

Definita la funzione

$$F_n(x):=f(x)-f_n''(x)+f_n^{(4)}(x)+\ldots+(-1)^n f_n^{(2n)}(x),$$

dato che la funzione ausiliaria è un polinomio di grado $2n$ segue che le derivate di ordine superiore a $2n$ della $f_n(x)$ sono nulle, si ha

$$\frac{d}{dx}\{F_n'(x)senx-F_n(x)cos\,x\}=F_n''(x)senx+F_n(x)senx=f_n(x)senx$$

e quindi

$$I_n=\int_0^\pi f_n(x)senxdx=\left[F_n''(x)senx-F_n(x)cos\,x\right]_0^\pi=F_n(\pi)-F_n(0).$$

Supponiamo per assurdo che π sia razionale e poniamo $\pi = \frac{a}{b}$ dove a e b sono i parametri che intervengono nella funzione ausiliaria, parametri che supponiamo interi e primi tra loro. Essendo a e b interi il polinomio $n!\, f_n(x)$ ha coefficienti interi, inoltre esso, avendo come zeri distinti i numeri razionali $x = 0$ e $x = \frac{a}{b}$ entrambi interi di ordine n, ha le derivate sino a quella di ordine n-1 nulle in tali punti mentre le derivate successive $f_n^{(n)}(x), f_n^{(n+1)}(x), \ldots, f_n^{(2n)}(x)$ assumono, come è facile verificare, valori interi e quindi I_n risulta intero in quanto lo sono $F_n(\pi)$ e $F_n(0)$. Ma nell'intervallo $]0, \pi[$, dove ricordiamo è $\pi = \frac{a}{b}$, essendo $0 < f_n(x) < \left(\frac{a}{b}\right)^n \frac{a^n}{n!} = \pi^n \frac{a^n}{n!}$ e $0 < senx < 1$, riesce $0 < f_n(x) senx < \pi^n \frac{a^n}{n!}$ e pertanto I_n è, qualunque sia n, un intero positivo dipendente da n e non superiore a $\pi^{n+1} \frac{a^n}{n!}$. Quest'ultima espressione, per n che diverge, tende a zero e ciò contro il fatto che I_n sia intero positivo; l'assurdo conduce all'asserto.

INTERI ALGEBRICI

Ogni numero ϑ soluzione di una equazione algebrica a coefficienti interi e con coefficiente della potenza massima uguale ad uno si dice *intero algebrico*. Sono interi algebrici ad esempio $-\sqrt{n}, \sqrt{n}$ $n \in \mathbb{N}$; $-i, i \ldots$
Osserviamo che i numeri interi sono interi algebrici e che un intero algebrico che sia razionale è necessariamente un intero.
I coniugati degli interi algebrici sono interi algebrici.
Un numero algebrico che non sia un intero algebrico è detto frazionario.

Sia ϑ un numero algebrico frazionario e sia $a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m = 0$ una equazione a coefficienti interi a cui ϑ soddisfa, cioè tale che $a_0\vartheta^m + a_1\vartheta^{m-1} + ... + a_m = 0$. Si consideri ora il numero $\vartheta_1 = a_0\vartheta$, esso soddisfa l'equazione algebrica a coefficienti interi

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2a_0x^{m-2} + ... + a_ma_0^{m-1} = 0$$

pertanto $a_0\vartheta$ è un intero algebrico. Possiamo allora concludere che ogni numero algebrico è riducibile ad un intero algebrico moltiplicandolo per un opportuno numero intero positivo.

IL CAMPO DEI NUMERI ALGEBRICI

Si riconosce immediatamente che se α è algebrico non nullo il suo opposto ed il suo reciproco sono algebrici. (Se α è un intero algebrico il suo opposto è un intero algebrico ma nulla può dirsi per il reciproco). Per provare che l'insieme dei numeri algebrici è un campo, sottocampo dei complessi, basta provare che esso è chiuso rispetto all'operazione di addizione e a quella di moltiplicazione.

Supponiamo che α e β siano numeri algebrici non nulli e

$$\begin{aligned} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \\ b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0 = 0, \quad b_m \neq 0 \end{aligned}$$

siano due equazioni algebriche a coefficienti razionali aventi rispettivamente α e β come soluzione. Posto $k = n \cdot m$, siano

(1) $$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$$

i numeri

$$\alpha^p \cdot \beta^q \quad \text{con} \quad \begin{matrix} p = 0,1,2,...,n-1 \\ q = 0,1,2,...,m-1 \end{matrix}.$$

Si considerino i numeri (2) $\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_k$; se è $\xi_i = \alpha^p \cdot \beta^q$ con $0 \le p < n-1$ il numero $\alpha\xi_i = \alpha^{p+1} \cdot \beta^q$ è uno dei numeri della classe (1); se è $\xi_i = \alpha^{n-1} \cdot \beta^q$ risulta $\alpha\xi_i = \alpha^n \cdot \beta^q$ ed essendo $a_n\alpha^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ sarà $\alpha\xi_i = \dfrac{-\beta^q}{a_n}\left[a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots. + a_0\right]$ e quindi $\alpha\xi_i$ è combinazione lineare a coefficienti razionali dei numeri della classe (1).

Pertanto i numeri della classe (2) o sono appartenenti alla classe (1) ovvero sono esprimibili mediante combinazione lineare a coefficienti razionali dei numeri della classe (1).

La stessa proprietà è verificata dai numeri (3) $\beta\xi_1, \beta\xi_2, \ldots, \beta\xi_k$.

Da quanto visto segue che i numeri

$$(\alpha+\beta)\xi_1, (\alpha+\beta)\xi_2, \ldots, (\alpha+\beta)\xi_k$$

sono esprimibili mediante combinazioni lineari a coefficienti razionali dei numeri della classe (1), pertanto si ha

$$\begin{array}{l} (\alpha+\beta)\xi_1 = r_{11}\xi_1 + r_{12}\xi_2 + \ldots. + r_{1k}\xi_k \\ (\alpha+\beta)\xi_2 = r_{21}\xi_1 + r_{22}\xi_2 + \ldots. + r_{2k}\xi_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha+\beta)\xi_k = r_{k1}\xi_1 + r_{k2}\xi_2 + \ldots. + r_{kk}\xi_k \end{array} \quad \text{con } r_{ij} \in \mathbf{Q}$$

Ne consegue che il sistema lineare omogeneo

$$(4) \qquad \begin{cases} [r_{11} - (\alpha+\beta)]x_1 + r_{12}x_2 + \ldots. + r_{1k}x_k = 0 \\ r_{21}x_1 + [r_{22} - (\alpha+\beta)]x_2 + \ldots. + r_{2k}x_k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{k1}x_1 + r_{k2}x_2 + \ldots. + [r_{kk} - (\alpha+\beta)]x_k = 0 \end{cases}$$

ammette la soluzione non identica (1) e ciò implica che il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, pertanto il numero $\alpha+\beta$ è soluzione dell'equazione algebrica a coefficienti razionali

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} r_{11}-x & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22}-x & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk}-x \end{vmatrix} = 0$$

e quindi algebrico.

In maniera analoga si dimostra che $\alpha \cdot \beta$ è algebrico.

Osservazione: se α e β sono interi algebrici i numeri della classe (2) e quelli della classe (3) sono combinazioni lineari a coefficienti interi dei numeri della classe (1) e quindi nel sistema (4) i numeri r_{ij} sono interi e quindi l'equazione (5) è una equazione a coefficienti interi il cui coefficiente della potenza massima è $(-1)^k$ e pertanto $\alpha+\beta$ è un intero algebrico.

Mostreremo ora che il campo dei numeri algebrici è un sottocampo proprio del campo dei numeri complessi e faremo ciò provando che l'insieme dei numeri algebrici costituiscono una *infinità numerabile*.

Come abbiamo più volte sottolineato ogni numero algebrico è soluzione di una equazione algebrica irriducibile a coefficienti interi primi fra loro (equazione canonica).

Sia

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = 0$$

l'equazione canonica del numero algebrico α; diremo altezza di α l'intero positivo

$$(6)\qquad h = m + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_m|$$

Fissato h, esiste un insieme finito di polinomi canonici verificanti la (6) e conseguentemente un insieme finito di numeri algebrici di altezza h e

quindi l'insieme dei numeri algebrici è ottenibile come unione di una infinità numerabile di insiemi finiti e pertanto è numerabile.
Esempi: La più semplice equazione algebrica (canonica) $x = 0$ ha altezza $h = 2$ ed è l'unica; le equazioni algebriche di altezza 3 sono: $x+1=0$; $x-1=0$; quelle di altezza quattro sono: $2x+1=0$; $2x-1=0$; $x-2=0$, $x+2=0$; $x^2-1=0$; $x^2+1=0$. E così via.
Diremo che un numero, reale o complesso, è **trascendente** se esso non è algebrico. Ovviamente i numeri trascendenti sono una infinità non numerabile.

Enunciamo il seguente *Teorema* (Lindemann):
Qualunque siano i numeri algebrici distinti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *e i numeri interi relativi* $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *non contemporaneamente nulli risulta*

$$z_1 e^{\lambda_1} + z_2 e^{\lambda_2} + \ldots + z_k e^{\lambda_k} \neq 0.$$

Il Teorema di Lindemann è stato generalizzato dimostrando che:
Qualunque siano i numeri algebrici distinti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *e i numeri algebrici* $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *non contemporaneamente nulli risulta*

$$z_1 e^{\lambda_1} + z_2 e^{\lambda_2} + \ldots + z_k e^{\lambda_k} \neq 0.$$

Dal teorema di Lindemann (prima forma) discende la trascendenza di e.
Infatti se e fosse algebrico esso sarebbe soluzione di una equazione algebrica a coefficienti interi del tipo

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \quad \text{con } m > 0$$

e dunque sarebbe

$$a_0 e^m + a_1 e^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

ma tale uguaglianza, in virtù del teorema di Lindemann, non può sussistere.

Dimostriamo ora la trascendenza di π.

Si ha, come è noto, $e^{i\pi}+1=0$ ossia $e^{i\pi}+e^{0}=0$ ed essendo i numeri $i\pi$ e 0 distinti, per il teorema di Lindemann (seconda forma), non possono essere entrambi algebrici ed essendo 0 algebrico non è algebrico $i\pi$ ed essendo i algebrico segue che π è trascendente così è risolto il più antico problema matematico lasciato in eredità dai greci: l'impossibilità di risolvere con riga e compasso il problema della quadratura del cerchio.

Facilmente si verifica che la curva $y=\log x$ non passa per nessun punto algebrico tranne che per (1,0).

Con riferimento ai numeri interi algebrici vale il seguente

Teorema (a):

Ogni radice, ϑ, *di una equazione algebrica*

$$x^{m}+\alpha x^{m-1}+....+\gamma=0$$

con primo coefficiente 1 e $\alpha,....,\gamma$, *interi algebrici è un intero algebrico.*

Dimostrazione

Siano $n_1,n_2,...,n_{m-1}$ i gradi rispettivamente di $\alpha,....,\gamma$, cioè sia

$$\alpha^{n_1}+a_1\alpha^{n_1-1}+....+a_{n_1}=0$$

$$\beta^{n_2}+b_1\beta^{n_2-1}+....+b_{n_2}=0$$

....

$$\gamma^{n_{m-1}}+c_1\gamma^{n_{m-1}-1}+...+c_{m-1}=0$$

con $a_1,...,a_{n_1},b_1,...,b_{n_2},c_1,...,c_{m-1}$ interi.

Poniamo $r=m\cdot n_1\cdot n_2\cdot...\cdot n_{m-1}$ e consideriamo in un ordine qualunque le r quantità

$\eta_i=\alpha^{l}\cdot\beta^{p}\cdot....\cdot\theta^{t}$ con

$l=0,1,....,n_1-1;\ p=0,1,....,n_2-1;\ ...;t=0,1,....,m-1$, è immediato verificare che il prodotto $\theta\eta_i$ è una combinazione lineare a coefficienti interi delle η_i pertanto si ha che θ è un intero algebrico.

Divisibilità

La nozione di divisibilità nel campo di integrità degli interi algebrici si pone come la si è posta nell'aritmetica razionale.

Def. *Diremo che l'intero algebrico α è divisibile per l'intero algebrico β se il numero algebrico $\frac{\alpha}{\beta}$ è un intero algebrico.*

Valgono le seguenti leggi elementari:

i) Se un intero algebrico β divide ciascuno degli interi algebrici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ esso divide la loro somma.

ii) Se l'intero β divide l'intero α e se l'intero γ divide l'intero β, allora l'intero γ divide l'intero α.

iii) Se β divide α allora divide $\alpha\gamma$.

Proprietà degli interi algebrici

I numeri interi algebrici riproducendosi mediante addizione, sottrazione e moltiplicazione costituiscono un *campo di integrità* nel quale particolare importanza hanno le *unità algebriche* di seguito definite.

Definizione: *Diremo che un intero algebrico ε è una unità algebrica se esso divide il numero* 1, *cioè se $\frac{1}{\varepsilon}$ è ancora un intero algebrico e conseguentemente un'unità algebrica* ($\frac{1}{\varepsilon}$ intero algebrico ed ε unità algebrica implicano che $1 : \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$ è un intero algebrico e pertanto $\frac{1}{\varepsilon}$ è una unità algebrica).

Immediata conseguenza della definizione è la seguente proprietà:
Ogni unità algebrica divide un qualunque intero algebrico.

Altre notevoli proprietà delle unità algebriche sono le seguenti:

Il prodotto di unità algebriche è una unità algebrica.
Il rapporto di due unità algebriche è una unità algebrica.
Una qualunque radice ennesima di una unità algebrica è una unità algebrica (infatti posto $\varepsilon_1 = \sqrt[n]{\varepsilon}$ segue che $\varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon_1^{n-1}}\varepsilon$ e quindi $\frac{1}{\varepsilon_1} = \varepsilon_1^{n-1}\frac{1}{\varepsilon}$ che è un intero algebrico in quanto prodotto dell'intero algebrico ε_1^{n-1} (*) per l'unità algebrica $\frac{1}{\varepsilon}$).

(*) Il fatto che ε_1^{n-1} sia un intero algebrico discende da questa semplice considerazione:
Sia

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

l'equazione canonica che individua ε; dall'essere $\varepsilon_1 = \sqrt[n]{\varepsilon}$ si ha $\varepsilon = \varepsilon_1^n$ e quindi ε_1 è un intero algebrico in quanto è radice dell'equazione algebrica a coefficienti interi

$$x^{m \cdot n} + a_1 x^{(m-1)n} + \ldots + a_{m-1}x^n + a_m = 0.$$

Conseguentemente ε_1^{n-1} è un intero algebrico in quanto prodotto di interi algebrici.

Considerato il campo di integrità degli interi algebrici in esso è facile determinare le unità (algebriche). Consideriamo l'equazione algebrica a coefficienti interi

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x \pm 1 = 0,$$

essa ha per radici i numeri algebrici

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$$

che sono interi algebrici in quanto è $\prod_{i=1}^{m} \varepsilon_i = \pm 1$ da cui segue che $\frac{1}{\varepsilon_i} = \pm \prod_{k=1, k \neq i}^{m} \varepsilon_k$, essendo il secondo membro un intero algebrico, è una unità algebrica.

Possiamo concludere che tutte *le unità algebriche si ottengono come radici delle equazioni a coefficienti interi con coefficiente della potenza massima uguale ad uno e termine noto in valore assoluto uguale ad uno.*

Osservazione: *Le unità algebriche sono una infinità numerabile.*

Diamo ora la seguente **definizione**: *Chiameremo associati due interi algebrici che si dividono scambievolmente, cioè due interi il rapporto dei quali è un intero algebrico.*

E' facile verificare che ogni intero algebrico ha infiniti associati; infatti moltiplicando un intero algebrico α per una qualunque unità algebrica ε otteniamo l'intero algebrico $\alpha \cdot \varepsilon$ ed essendo $\frac{\alpha}{\alpha \cdot \varepsilon}$ e $\frac{\alpha \cdot \varepsilon}{\alpha}$ unità algebriche segue che α e $\alpha \cdot \varepsilon$ sono associati.

Da quanto visto ogni intero algebrico ha infiniti interi algebrici che lo dividono pertanto è decomponibile sempre in infiniti modi nel prodotto di interi algebrici.

E' facile vedere che ogni intero algebrico ha infiniti divisori che non sono né unità algebriche né associati, tali divisori li chiameremo essenziali; infatti fissato l'intero algebrico α, che non sia una unità algebrica gli interi algebrici (vedi teorema (a))

$$\sqrt{\alpha}, \sqrt[3]{\alpha}, \ldots, \sqrt[n]{\alpha}, \ldots$$

sono divisori di α e non sono unità algebriche e tanto meno associati.

Pertanto, riguardando come essenziale la decomposizione di un intero algebrico nel prodotto di due fattori nessuno dei quali sia una unità algebrica, possiamo concludere che nel campo totale degli interi algebrici non esistono numeri essenzialmente indecomponibili, anzi si verifica per ogni intero algebrico una decomponibilità illimitata cosa assai diversa dall'aritmetica scolastica.

Nicolò Giovannelli