Il signor polinomio [$b^2 - 4ac$]: Strumentale universale dell'algebra classica

"NOI SIAMO FATTI DELLA MATERIA DEI SOGNI E LE NOSTRE PICCOLE VITE SONO CIRCONDATE DAL SONNO
LA TEMPESTA- W. SHAKEPEARE

LE QUATTRO PAROLE CHIAVE DELLA MATEMATICA SPIEGATE AGLI ALLIEVI :

(I) FORMALIZZARE = DAGLI OGGETTI AGLI ENUNCIATI
(II) INTERPRETARE = DAGLI ENUNCIATI AGLI OGGETTI
(III) DIMOSTRARE = DAGLI ENUNCIATI AGLI ENUNCIATI
(IV)ASSIOMATIZZARE = DAGLI OGGETTI AGLI INSIEMI
UN PROFESSORE DI MATEMATICA

IL PENSIERO E' LA FATICA DELL'INTELLETTO, IL SOGNO IL SUO PIACERE.
V.HUGO

[**b^2 – 4ac]** DI UN EQUAZIONE DI II GRADO A COEFFICENTI INTERI VALE **23**[1] .QUAL E' LA NATURA DELLE RADICI ?
UN PROFESSORE DI MATEMATICA
R^2 R^3. 13. p. R^2 7. m. R^3 10 = $\sqrt{\sqrt[3]{13}} + \sqrt{7} - \sqrt[3]{10}$
"LE TRIPARTY EN LA SCIENCE DES NOMBRES" -NICOLA CHUQUET (1484) – UNA PRIMA MANIFESTAZIONE DELL'ALGEBRA SINCOPATA

Molti dei problemi che discuteremo certamente sconcertano gli allievi e qualche addetto ai lavori . Tuttavia possono essere risolti con l'uso di qualche semplice idea e l'ausilio del famoso polinomio dei nostri anni liceali cui la didattica scolastica assegna compiti davvero ristretti . Cercheremo di dimostrare quale messe di informazioni si possono estrarre dalla notissima condizione di realtà delle radici dell' equazione algebrica di II grado . Informazioni che permettono la risoluzione di un numero assai rilevante di esercizi e problemi sia in matematica che in fisica .
Supponiamo di dover risolvere l'equazione :

$$5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

Si potrebbe essere così fortunati o così intelligenti da capire che l'equazione può essere riscritta come :

$$(x+y-1)^2 + (2x-y)^2 = 0$$

la cui risoluzione è semplice quanto il sistema :

$$x + y - 1 = 0 \wedge 2x - y = 0$$

Ma se l'idea non sovviene , cosa fare ? Pensiamo all'equazione come composta da una sola incognita x :

$$5x^2 - 2(y+1)x + 2y^2 - 2y + 1 = 0$$

Abbiamo declassato la y da incognita a comparsa . Il signor polinomio $b^2 - 4ac$, che in seguito indicherò con la sigla SP , vale :

$$SP = -4(3y-2)^2$$

$SP \geq 0$ sse $y = 2/3$ da cui segue $x = 1/3$; $y = 2/3$ ed $x = 1/3$ sono le soluzioni dell'equazione proposta .

Un sistema di IV grado del tipo :

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0 \end{cases}$$

che sarebbe certamente arduo affrontare con le tradizionali artiglierie matematiche . IL SP per la prima equazione è :

$$SP = -4(y-3)^2 \qquad \text{con } SP \geq 0$$

da cui segue , facilmente , $y = 3$; $x = 2$.

Ed ancora :

$$\begin{cases} x + y + +z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

che si può porre nella forma :

$$\begin{cases} x = \sqrt{3 - y - z} \\ \left(\sqrt{3 - y - z}\right)^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \end{cases} \rightarrow Y^2 + \left(Z - \sqrt{3}\right)Y - \sqrt{3}Z + 1 = 0$$

Il cui SP = - $\left(\sqrt{3}z - 1\right)^2$ quindi $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$,valore che ci conduce alla rapida ed agevole soluzione del sistema proposto con $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Un esempio più fascinoso è il seguente :
data l'equazione $ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0$ trovare quei valori di a per cui esiste un'unica coppia (x,y) che la verifica .
In questi casi giova un'analisi preliminare per qualche valore particolare di a . Sia a = 0 $\rightarrow$ $2y^2 + 4y + 2 = 0$ $\rightarrow$ y = - 1 per cui le coppie (x , -1) sono soluzioni della nostra equazione e quindi a = 0 non fa al caso nostro . Se a $\neq$ 0 , riscriviamo l'equazione nella forma :

$$ax^2 + 2a(y - 1)x + (3a + 2)y^2 + (4 - 6a) + 2 = 0$$

Il SP = $4(a - 2)(y + 1)^2$; ponendo $a(a - 2) < 0$ $\rightarrow$ $0 < a < 2$. La soluzione è allora y = -1 , x = 3. Per $a \leq 0 \vee a \geq 2$, la soluzione non è unica .

Un esempio tratto dall'arte del triangolo , che i più chiamano trigonometria , è la relazione :

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}$$

Utilizzando alcune note trasformazioni si ottiene :

$$4\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)-4\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-1=0$$

e ponendo $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=t$, incappiamo nella solita relazione di II grado :

$$4t^2-4\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)t+1=0$$

Il SP $=16\left[\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-1\right]\leq 0 \rightarrow \cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)=1$ da cui si traggono i sisten

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=1\\ \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\end{cases} \vee \quad \begin{cases}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=-1\\ \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

che rapidamente conducono alle sospirate soluzioni (lascio al lettore la soluzione dei sistemi) .

Anche nel campo delle disuguaglianze , il SP dice autorevolmente la sua . Un primo esempio riguarda la dimostrazione della notissima relazione :

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \quad a,b,c\in R \qquad (1)$$

Riscriviamola come : $\quad a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc\geq 0$

$\rightarrow SP=-3(b-c)^2$. Dal momento che SP è non positivo , la (1) è vera sempre anche quando b = c .

Un esempio più intrigante :

Provare che : $\quad 6a+4b+5c\geq 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc} \quad a,l$

Posto $\sqrt{a}=t$, otteniamo :

$$6t^2-\left(5\sqrt{b}+7\sqrt{c}\right)t+4b+5c-3\sqrt{bc}\geq 0$$

con SP $= -71\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \leq 0$, come appunto cercavasi addurre .

Ed ancora : Per quali valori di a la relazione
$\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a\right| \leq 3$ è vera $\forall x \in R$;
Se $\cos x = 0 \rightarrow |a+3| \leq 3 \rightarrow -6 \leq a \leq 0$; se
$\cos x \neq 0 \rightarrow \left|3\tan^2 x + 2a\tan x + 1 + \frac{a}{\cos^2 x}\right| \leq \frac{3}{\cos^2 x}$;
Posto $\tan x = t \rightarrow \left|(a+3)t^2 + 2at + a + 1\right| \leq 3\left(1+t^2\right)$** . Conclusioni : Se
$a = 0$ la ** è vera $\forall t$; se $a \neq 0$
seguendo metodo ampiamente esposto si trova che la ** è vera per
$-\frac{11}{5} \leq a \leq 0$. Infine la disuguaglianza di **Cauchy - Schwarz** :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx$$

dove f e g sono due funzioni continue in [a , b].

Consideriamo $\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2 dx$ e scriviamolo come polinomio nella variabile reale λ :

$$\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2 dx = \lambda^2 \int_a^b g(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b (f(x)g(x))dx + \int_a^b (f(x))^2 dx \quad ***$$

Il primo membro della *** è non negativo , dunque anche il secondo membro , un polinomio di II grado , deve essere non negativo . Pertanto :

$$\mathrm{SP} = \left(\int_a^b (f(x)g(x))dx\right)^2 - \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx \leq 0$$

da cui segue la nostra disuguaglianza [2].Non proseguiremo oltre , pauca sed matura , anche se il SP si può utilizzare per ricercare i massimi e i minimi e le immagini di certe funzioni e gioca un ruolo importante nella teoria delle forme quadratiche .

$[b^2 - 4ac]$ IN FISICA

Daremo ,quindi , qualche notevole esempio sull'uso dell' SP in fisica .
Nell'atomo di idrogeno H l'energia totale E dell'elettrone è :

$$E = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_o r}$$

con p = quantità di moto dell'elettrone , m = massa dell'elettrone , q_e = carica dell'elettrone , r = distanza elettrone – protone . Si può scrivere :

$$E = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_o r} = \frac{A_o}{2r^2} - \frac{B_o}{r} \quad \#\#+$$

dopo aver posto $p = \frac{\hbar}{r}$ per la celebre condizione di quantizzazione di Bohr e $\frac{\hbar^2}{m} = A_o$; $\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ $=B_o$ Si ottiene :

$$2Er^2 + 2B_o r - A_o = 0$$

Il SP = $4B_0^2 + 8EA_0 \geq 0$ ci permette di trovare l'energia minima $E_{min} = -\frac{B_o^2}{2A_0} = 1Ry = -13,6ev$ .Sostituendo nella ## si ottiene la distanza tra l'elettrone e il protone nello stato fondamentale $r = a_o = A_o/B_o = 0,5$ nm . Due numeri , -13,6 ev e 0,5 nm , fondamentali nella fisica atomica .Concludiamo con l'illustrazione del celeberrimo " **PRINCIPIO DI ARCHIMEDE** "

Sia dato un oggetto di altezza h , sezione A , densità ρ e un liquido di densità ρ_0 con $\rho_0 > \rho$.

Immergiamo l'oggetto nel fluido per un tratto di lunghezza y . La sua energia potenziale passa da zero a - ρ ghAy dal momento che il suo centro di massa si è abbassato di un tratto y . L'energia potenziale della

massa di liquido spostato aumenta da zero a $\rho_0 gAy^2/2$ in quanto il centro di massa del liquido spostato si è innalzato di y/2 .
L'energia U della nuova configurazione del sistema oggetto – liquido è :

$$U = - \rho ghAy + \rho_0 gAy^2/2 \quad {}^{\circ\circ}$$

di cui dobbiamo trovare il minimo . Riscritta la °° come $- \rho ghAy + \rho_0 gAy^2/2 - U = 0 \rightarrow$ il SP = $(\rho ghA)^2 - 2U\rho_0 gA \geq 0$
da cui :

$$U \geq - \rho^2 g\, h^2 A/2$$

Il minimo si ottiene per $U_{min} = - \rho^2 g\, h^2 A/2$, valore che , introdotto nella °° , ci dà $y_{min} = \rho h/\rho_0$. Moltiplicando entrambi i membri per $Ag\rho_0$ si ottiene il principio di Archimede :

$$Ag\rho_0 y_{min} = \text{peso liquido spostato} = Ag\rho h = \text{peso dell'oggetto}$$

Il metodo descritto è , quindi , chiaro :
I) individuare l'equazione che descrive il comportamento del sistema ;
II) se l'equazione risulta di 2° grado in una delle variabili , utilizzare il polinomio $b^2 - 4ac$ per estrarre tutte le informazioni che , come abbiamo ampiamente dimostrato , il SP è in grado di fornire .

[b^2 – 4ac] NEL "DE MENSURA SORTIS"

Data l'equazione $x^2 + bx + c = 0$ dove i coefficienti b e c sono scelti a caso in $[-d , d]^2$, qual è la probabilità che l'equazione abbia radici reali ? La condizione $b^2 - 4c \geq 0$ nel piano b c rappresenta la porzione di piano esterna alla **parabola :** $c = b^2/4$. La parabola divide il quadrato di lato 2d in due zone . La probabilità cercata è il rapporto tra l'area di quella parte del quadrato esterna alla parabola e l'area dell'intero quadrato :

$$\frac{4d^2 - \frac{2}{3}d^{\frac{3}{2}}}{4d^2} = 1 - \frac{1}{6\sqrt{d}}$$

Un risultato assai interessante[3] . Infatti se d $\rightarrow +\infty$ allora la probabilità che le radici siano reali tende a 1.
Passiamo all'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ con a , b , c scelti a caso in $[0 , 1]^3$. Qual è la
probabilità che l'equazione abbia radici reali ? Nello spazio a,b,c l'equazione $b^2 - 4ac = 0$ rappresenta un **cono** con il vertice nel punto (0,0,0) .
Infatti $f(a,b,c) = b^2 - 4ac$ è una funzione omogenea di II grado che , uguagliata a zero , rappresenta una figura formata da rette uscenti dall'origine .
La probabilità che l'equazione abbia radici reali è data dal rapporto tra il volume della figura solida d'intersezione tra il cono e il cubo e il volume del cubo di lato unitario . Il volume cercato è :

$$\left\{(a,b,c) \in [0,1]^3 : b \geq 2\sqrt{ac}\right\}$$

Se fissiamo a e c , b descrive un intervallo di lunghezza $1 - 2\sqrt{ac}$.
Dobbiamo , dunque , calcolare l'integrale $I = \iint_D (1 - 2\sqrt{ac})\,da\,dc$ dove l'insieme D è dato da :

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq 1 \\ 0 \leq c \leq 1 \\ ac \leq 1/4 \end{cases}$$

L'integrale I si svolge nel seguente modo :

$$I = \int_0^1 dc \int_0^{\frac{1}{4}} (1 - 2\sqrt{ac})\,da + \int_{\frac{1}{4}}^1 da \int_0^{\frac{1}{4a}} (1 - 2\sqrt{ac})\,dc = \frac{5}{36} + \frac{1}{6}\ln 2 = 0{,}254\ldots\ldots$$

$$\sim 25{,}4\%$$

Lascio , infine , al lettore l'analisi del caso $\left\{(a,b,c) \in [0,L]^3 : b \geq 2\sqrt{ac}\right\}$ quando $L \rightarrow +\infty$.

NOTE

1.Il numero **23** ha una caratteristica notevole : si può esprimere come somma di nove cubi ! Condivide questa proprietà solamente con **239** .
2.L'analogo discreto della disuguaglianza di **Cauchy - Schwarz** è : $(\sum ab)^2 \leq (\sum a)^2 (\sum b)^2$ che , facilmente (?) , si ricava dalla relazione $\sum(ax+b)^2 \geq o$.

3. Si è utilizzata la formula di **Archimede** : $\frac{1}{6}|a|(x_{II}-x_I)^3$, che dà l'area del segmento parabolico .

Antonino Gentile

Nomenclator Commendat - Fabio Vander

Nell'antica Roma, tra i servi di cui si circondava ogni personaggio particolarmente influente, ce n'era uno che non mancava mai di accompagnarlo durante le uscite in pubblico: il nomenclator, il cui compito – di primaria importanza – consisteva nel ricordare il nome e le principali notizie relative a quelle persone che il padrone poteva incontrare per strada senza rammentare chi fossero ed i motivi per cui venivano a cercarlo.

Il nomenclator era molto più che una rubrica portatile semovente: era un'assicurazione contro le figuracce da dimenticanza, un segnalatore di rapporti da coltivare, un rammentatore di rischi deambulanti...

Chiedo allora perdono se vesto i panni desueti dell'antico servo permettendomi di segnalarvi qualche nominativo, e spero che i lettori mi diano venia del rischio cui ogni nomenclator andava incontro, quello di infastidire il suo signore ricordandogli nomi che egli sapeva benissimo o particolari di cui era già a conoscenza, specialmente quelli del cui ricordo non aveva alcun piacere.

Il primo nome che mi fa piacere rammentare ai lettori è quello di Fabio Vander: nato a Roma nel 1958, si è laureato in Filosofia con Gennaro Sasso ed in Scienze Politiche con Pietro Scoppola, due studiosi di grande prestigio nel mondo accademico, dei cui insegnamenti Vander ha fatto tesoro prima di avviarsi per la sua personale strada di studioso. Vander lavora come legista presso il Senato, e questa posizione privilegiata di osservazione della vita politica italiana gli è stata sicuramente d'aiuto per maturare una sua visione critica del legame tra cultura e vita politica nazionale.

Frutto della sua solerte attività di studioso sono alcuni volumi in cui egli affronta alcuni fra i temi più importanti di intersezione fra politica e filosofia: Metafisica della guerra. Confronto tra la filosofia italiana e la filosofia tedesca del '900 (Milano, Guerini ed., 1995), La modernità italiana (Lecce, Manni, 1997), L'estetizzazione della politica (Bari, De donato, 2001), Che cos'è socialismo liberale? (Manduria, Lacaita ed., 2002).

Non ho avuto modo di leggere il primo volume, che già dal titolo si preannuncia di grande interesse ed attualità; la lettura degli altri tre mi ha comunque consentito di apprezzare le grandi doti dell'Autore nel momento dell'analisi dei testi, celebri o quasi dimenticati che siano, e la ancora maggiore originalità delle tesi da lui sostenute con vigore espositivo. Originalità che non significa stravaganza, perché alla base di ogni affermazione di Vander sta, come dicevo, un formidabile lavoro di analisi dei testi, che gli permette di cogliere con acutezza l'aspetto più significativo.

La Modernità Italiana si articola in due parti: nella prima l'Autore conduce un interessante esame critico delle interpretazioni tedesche del Rinascimento Italiano (Burckhardt, Dilthey, Burdach e Cassirer), nella seconda mette a confronto Poesia e Struttura in Dante e Petrarca, riservando particolare attenzione al rapporto tra quest'ultimo e Cola di Rienzo. Un libro da leggere con attenzione e che fornirà sicuramente al lettore utili spunti di riflessione.

Non meno interessante è L'estetizzazione della Politica, volume nel quale Vander affronta con taglio filosofico il problema del Fascismo quale Anti-Italia. E' un libro di forte impatto, che ha il pregio principale proprio nel taglio filosofico con cui affronta il problema: sono infatti pochi i volumi che indaghino una realtà complessa quale il Fascismo usando tale punto di vista. Può darsi che alcune parti del volume non si conformino ad alcuni giudizi correnti, ma ribadisco che l'originalità di Vander è basata su un attento lavoro di analisi dei testi, e credo che proprio per questo motivo le sue interpretazioni risultino convincenti.

L'ultimo volume affronta un tema , quello del rapporto tra Gramsci, Rosselli e la Rivoluzione in Occidente, che lungi dall'essere superato dalla storia è – secondo l'Autore – di non sopita attualità. Anche qui non manca una attenta lettura dei testi ed un largo confronto politico e filosofico (Arendt, Popper, Sen e Wallerstein sono gli autori più presenti), che consente ai lettori di cogliere aspetti meritevoli di ampia attenzione.

Consapevole del fatto che la virtù che più si addice ad un nomenclator è la discrezione e la misura, pongo qui fine a questa breve presentazione e mi auguro poter aprire un piccolo confronto con i lettori miei e soprattutto di Vander.

Renato Lo Schiavo