Il problema dei due corpi

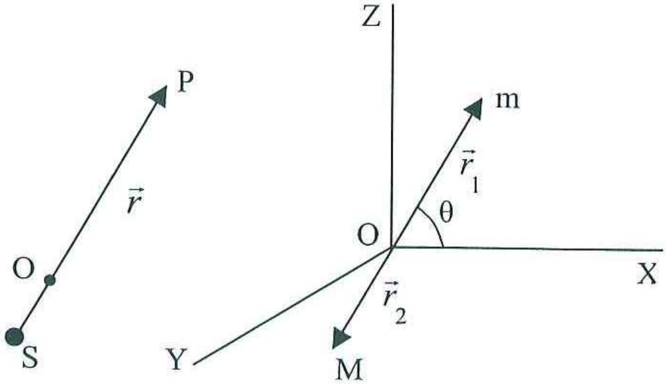
Newton poco prima di morire scrisse di sé: "...non so come mi veda il mondo; a me pare di essere stato come un fanciullo che gioca sulla spiaggia e gioisce nel raccogliere di quando in quando un ciottolo più liscio degli altri o una conchiglia più bella, mentre il grande oceano della verità gli si stende davanti, immenso e inesplorato..."

Le tre leggi di Keplero, dedotte direttamente dalle osservazioni, descrivono il moto dei pianeti, ma non ne interpretano le cause. Sono di carattere cinematico e nulla ci dicono circa le cause che producono tali movimenti, benché dei vaghi presentimenti di una forza regolatrice, emanata dal sole o dalla terra, fossero già presenti negli astronomi antichi e più concretamente in Copernico e Keplero. Con l'enunciazione della legge di gravitazione universale Newton, uno dei più grandi geni di tutti i tempi, afferma che la forza che provoca la caduta dei corpi sulla terra, come la mela del famoso aneddoto, è la stessa che costringe la luna a girare intorno al nostro pianeta. Per Newton il moto naturale di un corpo è il movimento uniforme lungo una linea retta. Il moto lungo una traiettoria curvilinea segnala la presenza di una forza che fa deviare continuamente il corpo (il pianeta) dal suo moto naturale. La forma ellittica delle orbite planetarie è determinata dalla risultante della forza di attrazione gravitazionale, che tende a far cadere i pianeti sul sole, e della forza inerziale, che porta i pianeti a mantenere il loro moto rettilineo con velocità costante.

La legge di gravitazione universale consiste soprattutto nell'avanzare l'ipotesi secondo cui certe leggi fisiche, verificabili direttamente solo sulla terra, devono avere carattere universale. La legge di gravitazione è valida in ogni parte dell'universo e perciò unica legge in grado di spiegare osservazioni terrestri e osservazioni celesti.

Newton espose nei suoi "Principia" che le tre leggi di Keplero si potevano dedurre dalla legge della gravitazione universale; la via è dunque inversa a quella empirica seguita dallo sviluppo storico. Noi ora ci limiteremo alla dimostrazione di quanto aveva enunciato Newton e alla illustrazione di alcuni risultati fondamentali.

Siano S e P il sole e il pianeta nel tempo t; indichiamo con M e m rispettivamente le masse del sole e del pianeta. Chiamiamo $\vec{r}$ il vettore indicato in figura, O il baricentro che definisce i vettori $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ tali che $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.



$$\vec{F}_m = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{F}_M = GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Poniamo per semplicità γ = GMm. Allora, mettendoci nel sistema del baricentro, abbiamo:

$$1)\ m\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_m = -\gamma\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad 2)\ M\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_M = \gamma\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Sommando le due relazioni precedenti, otteniamo $m\ddot{\vec{r}}_1 + M\ddot{\vec{r}}_2 = 0$, che esprime la conservazione della quantità di moto del sistema, come si può vedere, integrando l'ultima equazione rispetto al tempo $m\dot{\vec{r}}_1 + M\dot{\vec{r}}_2 =$ costante.

Se moltiplichiamo la relazione (1) per M e la relazione (2) per m, otteniamo:

$$1')\ mM\ddot{\vec{r}}_1 = -\gamma\frac{\vec{r}}{r^3}M \qquad 2')\ Mm\ddot{\vec{r}}_2 = \gamma\frac{\vec{r}}{r^3}m;$$

sottraendo la 2') dalla 1') si ha $mM(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2) = -\gamma\frac{\vec{r}}{r^3}(M+m)$,

e ancora $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\gamma\frac{\vec{r}}{r^3}(\frac{M+m}{mM})$, che si può scrivere

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\gamma\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \text{con} \qquad \mu = \frac{mM}{m+M} \qquad \mu = \text{massa ridotta},$$

che scriviamo anche nella forma

Nella forma (3) il nostro problema è allora uguale al problema di un solo corpo di massa μ rispetto a un centro O; in breve si è visto che il moto relativo di due masse gravitanti M e m obbedisce alla (3).

L'accelerazione $\ddot{\vec{r}}$ è collineare col vettore posizione $\vec{r}$, per cui si deve avere:

$$4) \qquad \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = 0 .$$

Questa relazione costituisce la condizione vettoriale caratteristica dei moti centrali. Dalla (4) segue agevolmente che la velocità areolare di ogni moto centrale rispetto al centro O è un vettore costante. Infatti la velocità areolare rispetto ad O è data, a meno di un fattore 1/2, da $\vec{r} \wedge \vec{v}$. Ora si ottiene, derivandola rispetto al tempo $\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{a}$, ossia, in quanto è $\dot{\vec{r}} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{v} = 0$, si ha:

$$5) \quad \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{r} \wedge \vec{a} .$$

Questa identità vale per qualsiasi moto: nel caso dei moti centrali risulta in base alla (4) $\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = 0$, onde si conclude che

$$6) \quad m(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \vec{l} ,$$

dove $\vec{l}/m$ denota un vettore costante in grandezza e direzione (doppio della velocità areolare del moto centrale). Ora, siccome il nostro moto è un moto centrale, esso è piano. Allora $\vec{r}$ è costantemente perpendicolare a $\vec{l}$ e quindi il pianeta mobile giace sempre nel piano normale a conviene caratterizzarli formalmente, restando nel piano del moto, assunto come piano coordinato Oxy. Dalla (6) deriva direttamente la relazione

$$7)\quad m\left(x\dot{y}-y\dot{x}\right)=l=\text{costante}$$

che esprime (il fattore m essendo una costante intrinseca del pianeta) la costanza della velocità areolare della posizione di P sul piano xy. Questo integrale primo prende il nome di integrale delle aree o anche del momento della quantità di moto. In questo modo abbiamo ricavato la seconda legge di Keplero, per la quale il raggio vettore copre in tempi uguali aree uguali. A questo punto è conveniente usare le coordinate polari (r, θ); la forza dipende allora solo da una coordinata: il raggio vettore r. I due integrali primi delle forze vive e delle aree, espressi in coordinate polari (r, θ) col polo nel centro di forza, assumono la forma:

$$8)\quad \frac{1}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\frac{K}{r}=E\,, \qquad\qquad 9)\quad r^2\dot{\theta}=l_0\,,$$

dove E e l_0 denotano rispettivamente l'energia totale e il modulo del momento angolare riferiti all'unità di massa.

Riscriviamo la (8) $\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2-\frac{2K}{r}-2E=0$ e dalla (9) $\dot{\theta}=\frac{l_0}{r^2}$ si ha:

$$10)\quad \dot{r}^2+\frac{l_0^2}{r^2}-\frac{2K}{r}-2E=0\,;$$

ma $\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\dot{\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{l_0}{r^2}$ che, sostituita nella relazione (10), diventa $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\cdot\frac{l_0^2}{r^4}+\frac{l_0^2}{r^2}-\frac{2K}{r}-2E=0$ e infine, dividendo per l_0^2, si ha:

$$11)\quad \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}-\frac{2K}{rl_0^2}-\frac{2E}{l_0^2}=0.$$

Consideriamo ora la funzione ausiliaria $u(\theta)$, definita da $u(\theta)=\dfrac{1}{r(\theta)}$,

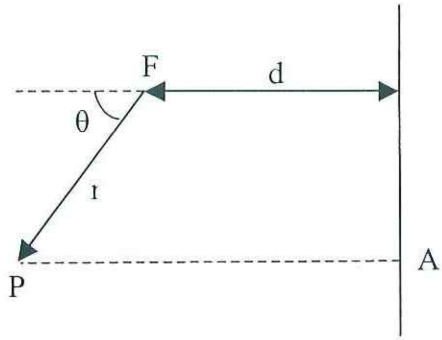
in quanto questa funzione conduce a un'equazione differenziale molto più semplice della (11); derivandola rispetto a θ, si ottiene $\dfrac{du}{d\theta}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}$ che, sostituita nella (11), fornisce $\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2=\dfrac{2Ku}{l_0^2}+\dfrac{2E}{l_0^2}-u^2$ e quindi $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{2Ku/l_0^2+2E/l_0^2-u^2}}=\int d\theta$, da cui la

$$12)\quad r=\frac{l_0^2/K}{1+\sqrt{\left(1+\dfrac{2l_0^2E}{K^2}\right)}\cos(\theta-\theta_0)}.$$

Questa è l'equazione polare di una conica, avente un fuoco nel centro di forza, l'asse inclinato di θ_0 sull'asse polare, il parametro

13) $p=l_0^2/K$ e la eccentricità 14) $\varepsilon=\sqrt{1+\dfrac{2l_0^2E}{K^2}}$.

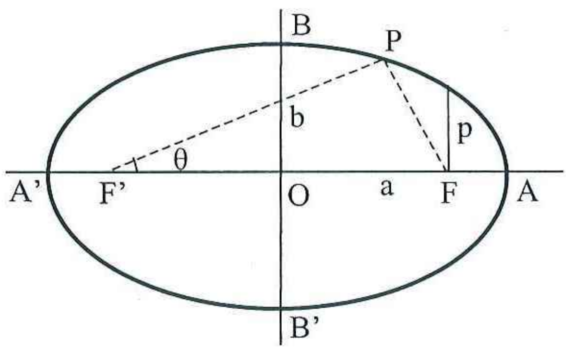
A questo punto è utile aprire una parentesi geometrica sulle coniche, ricordando che una conica è una curva piana definita come luogo dei punti, per i quali il rapporto tra la distanza da un punto (fuoco) e la distanza da una retta (direttrice) è pari a una costante chiamata eccentricità ε, con $\varepsilon=\dfrac{PF}{PA}=\dfrac{r}{d+r\cos\theta}$.



Pertanto l'equazione di una conica in coordinate polari di centro F risulta:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\varepsilon d}-\frac{1}{d}\cos\theta .$$

In particolare per un'ellisse di semiasse maggiore a, semiasse minore b, eccentricità ε e parametro p "semilatus rectum" (lunghezza della semicorda per un fuoco perpendicolare all'asse focale) valgono le relazioni:



$$a = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}, \qquad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \qquad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1-\varepsilon^2).$$

Ritornando al problema dei due corpi, la 14) mette in luce il risultato fondamentale che la conica descritta dal pianeta dipende esclusivamente dal segno dell'energia totale E; supposto $l_0 \neq 0$, il tipo di orbita dipenderà dal valore di "ε" secondo lo schema:

$\varepsilon > 1$, *$E > 0$: ramo di iperbole;* $\varepsilon = 1$, *$E=0$: parabola;*

$\varepsilon < 1$, *$E < 0$: ellisse;* $\varepsilon = 0$, $E = -K^2/2l_0^2$:
cerchio.

Come ultima questione, in questa discussione sulle forze dipendenti dall'inverso del quadrato della distanza, calcoliamo il periodo di rivoluzione per un'orbita ellittica. Se a e b sono le lunghezze del semiasse maggiore e del semiasse minore, l'area dell'ellisse è πab. Indicando con T la durata dell'intera rivoluzione e, ricordando che la velocità areolare ha modulo *l/2*, si ha $l = \frac{2\pi ab}{T}$; quadrando e dividendo per $p = \frac{b^2}{a}$ si ha: $\frac{l^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, la (13) infine diventa:

$$16) \qquad \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = K,$$

Keplero). K non è una costante universale (tipo G per intenderci) come pensava Keplero (vedi "harmonices mundi"). E' assai singolare che l'armonia vaticinata da Keplero si ritrovi, invece, nel mondo degli atomi, dove forme e frequenze degli stati quantici sono predeterminati! Newton nei suoi Principia mostrò che la legge di gravitazione universale poteva spiegare anche interazioni gravitazionali più complesse, come a esempio quelle che originano le maree e le complicate traiettorie delle comete attraverso il cielo. In breve si può affermare che Newton abbia escogitato un metodo quantitativo completamente nuovo per lo studio dei moti celesti. La dinamica newtoniana, a differenza delle leggi di Keplero, permette di analizzare una grande varietà di problemi complessi e ha quindi generato una nuova branca della fisica e dell'astronomia: la meccanica celeste. Con Newton termina il lungo cammino percorso dagli astronomi, per giungere a individuare le regolarità dei movimenti dei corpi celesti e a costruire modelli interpretativi dei fenomeni osservati. I procedimenti logici, i metodi matematici e i risultati finali del lavoro di Newton furono determinanti per gli sviluppi dell'astronomia e in genere della fisica dei secoli successivi. Poiché alcune variazioni da lui previste non erano state ancora osservate, si sentì l'esigenza di costruire strumenti con caratteristiche migliori. Anche numerosi nuovi problemi teorici furono portati alla luce. Spaziando avanti e indietro nel tempo di qualche centinaio di milioni di anni (per intervalli di tempo più lunghi l'estrapolazione diventa troppo incerta), la teoria newtoniana afferma che il nostro sistema planetario non è cambiato e nemmeno cambierà di molto rispetto a come si presenta attualmente. Ciò che stupì i contemporanei di Newton non è solamente la portata e la genialità della sua opera validità di una teoria, vi è da notare che la sua accettazione aumenta gradualmente man mano che se ne riconosce l'utilità nella risoluzione di problemi sempre più disparati.

I fisici e gli astronomi che si succedettero a Newton impiegarono quasi un secolo per approfondire, verificare e continuare la sua opera nel campo dei problemi del moto planetario. E anche dopo due secoli (cioè alla fine del 1800) i più importanti scienziati e filosofi potevano a ragione ricordare che la maggior parte di ciò che era stato fatto nella scienza meccanica dall'epoca di Newton in poi non era che uno sviluppo e un'applicazione degli studi da lui stesso effettuati.

P.S.: Ringrazio il Prof. Gentile Antonino per gli utili suggerimenti formulati durante le discussioni sull' affascinante "PROBLEMA DI KEPLERO"

Antonio Segalotti

Angolo delle Olimpiadi

Segnaleremo in questa rubrica , aperta al contributo di docenti e discenti , i problemi che hanno fatto "storia" nelle olimpiadi di matematica e di fisica. Ne daremo la soluzione commentata nello spirito del problem posing ritenendo di far cosa utile ai cultori tutti delle nostre discipline che sono tanta parte della cultura del tempo presente. Nel suo "Prologo alla geometria" Gerberto D'Aurillac , meglio noto come papa Silvestro II , scisse nel lontano 999 d.c. che Dio creò il mondo sul numero , il peso e la misura . Molti l'hanno ripetuto , ma fino a Galileo nessuno aveva veramente capito il significato di quella profetica frase . Le olimpiadi rappresentano , quindi , anche manifestazioni che avrebbero incontrato il plauso di Geberto in quanto si muovono nello spirito da lui indicato (spero di non essere caduto nello hysteron proteron).
I problemi che discuteremo sono stati proposti alla XXIX olimpiade di matematica (1988) e alla XX olimpiade di fisica (1989).

PROLEMA DI MATEMATICA : Se a , b , $q = (a^2 + b^2)/(ab + 1)$ sono interi , allora q è un quadrato . E' uno dei problemi più difficili dati alle olimpiadi , infatti né i sei membri del comitato promotore né gli specialisti australiani della teoria dei numeri riuscirono a risolverlo nel tempo prefissato (6 h). Problema arduo in quanto soltanto11 studenti (su centinaia di partecipanti : l'elite studentesca del pianeta) diedero la soluzione.
Non daremo la soluzione degli studenti, basata sullo studio della fascio di iperboli nel piano a , b e su ingegnose trasformazioni elementari (soluzione che può essere richiesta al curatore di questa rubrica) , ma una risoluzione , assai elegante , elaborata qualche anno dopo.

RISOLUZIONE

Supponiamo che la proposizione " Se a , b , $q = (a^2 + b^2)/(ab + 1)$ sono interi, allora q è un quadrato" sia falsa . Esisteranno , quindi ,delle coppie di interi (a,b) per le quali q non è un quadrato .Tra queste coppie scegliamo quella in cui il max(a,b) sia minimo nell'insieme delle coppie. Certamente $a \neq b$ perché se $a = b$ allora $q < 2$ e $q = 1$ la sola possibilità . Per la simmetria dell'espressione $(a^2 + b^2)/(ab + 1)$ scegliamo $a > b$ e scriviamo la relazione $q = (a^2 + b^2)/(ab + 1)$ come un'equazione di II grado in a :

$$a^2 - qba + (b^2 - q) = 0$$

le cui radici hanno somma qb e prodotto b^2-q . Allora data la coppia (a,b) ce ne sarà un'altra (a_1,b)
dove $a+a_1 = qb$ e $aa_1 = b^2-q$. Dalla relazione $aa_1 = b^2-q$ segue che :

$$a_1 = (b^2-q)/a < (b^2-q)/b < b$$

cosicchè $\max(a_1,b) = b < a = \max(a,b)$ e questo contraddice la nostra ipotesi iniziale che max (a,b) fosse il minimo. Il problema è così risolto con l'uso di una brillante strategia intellettuale.

PROBLEMA DI FISICA : Tre punti materiali P_1 , P_2 , P_3 non allineati , di masse m_1 , m_2 , m_3 ,
interagiscono tramite le forze gravitazionali ; il sistema dei tre punti materiali è isolato . Sia σ l'asse passante per il centro di massa del sistema e perpendicolare al piano su cui giace il triangolo
$P_1 P_2 P_3$. Quali condizioni devono soddisfare la velocità angolare ω (intorno all'asse σ) e le distanze :

$$P_1 P_2 = \alpha_{12} \qquad P_2 P_3 = \alpha_{23} \quad P_1 P_3 = \alpha_{13}$$

affinché il triangolo $P_1 P_2 P_3$ ruoti come un corpo rigido intorno all'asse σ ?

RISOLUZIONE

Essendo il sistema isolato la sua energia totale si conserva . L'energia potenziale dipende dalle
distanze tra i punti e quindi non varia .Di conseguenza anche l'energia cinetica rimane costante.
Il momento d'inerzia I , rispetto all'asse σ , funzione del quadrato delle distanze tra i punti , non varia . Ne consegue che :

$$\omega = \text{cost.}$$

E' questa la prima condizione ,abbastanza scontata , che si impone se vogliamo che il triangolo ruoti come un corpo rigido. Scegliamo , quindi , un sistema di coordinate la cui origine sia nel centro di massa del sistema (altre scelte sono possibili-alcuni allievi hanno posizionato l'origine
su P_1 e scelto l'asse x passante per P_2) e che i tre vettori posizione :

$$\vec{r}_1 \ , \ \vec{r}_2 \ , \ \vec{r}_3$$

giacciano nel piano x,y. Allora $\sigma \equiv z$. In questo sistema di coordinate si ha :

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0 \qquad \text{(A)}$$

Consideriamo il punto materiale P_1 soggetto alle forze :

$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_1m_2}{\alpha_{12}^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad ;\vec{F}_{31} = G\frac{m_1m_3}{\alpha_{13}^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$$

Nel sistema di riferimento inerziale da noi scelto , la somma di $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$ uguaglia la forza centripeta

$$\vec{F}_{r1} = -m_1\omega^2\vec{r}_1$$

Possiamo quindi scrivere le relazioni :

$$\begin{aligned} &G\frac{m_1m_2}{\alpha_{12}^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G\frac{m_1m_3}{\alpha_{13}^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + m_1\omega^2\vec{r}_1 = 0 \\ &G\frac{m_1m_2}{\alpha_{12}^3}\vec{r}_2 + G\frac{m_1m_3}{\alpha_{13}^3}\vec{r}_3 + m_1\vec{r}_1\left[\omega^2 - \frac{Gm_2}{\alpha_{12}^3} - \frac{Gm_3}{\alpha_{13}^3}\right] = 0 \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

Dalla (A) traiamo $m_2\vec{r}_2 = -m_1\vec{r}_1 - m_3\vec{r}_3$ che ci permette di eliminare $\vec{r}_2$ dalla (B) e pervenire a:

$$\vec{r}_1m_1\left[\omega^2 - \frac{Gm_2}{\alpha_{12}^3} - \frac{Gm_3}{\alpha_{13}^3} - \frac{Gm_1}{\alpha_{12}^3}\right] + \vec{r}_3\left[\frac{1}{\alpha_{13}^3} - \frac{1}{\alpha_{12}^3}\right]Gm_1m_3 = 0 \qquad \text{(C)}$$

I vettori $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_3$ non hanno la stessa direzione , quindi la (C) si annulla sse :

$$\left[\frac{1}{\alpha_{13}^3} - \frac{1}{\alpha_{12}^3}\right]Gm_1m_3 = 0 \quad \cap \quad \left[\omega^2 - \frac{Gm_2}{\alpha_{12}^3} - \frac{Gm_3}{\alpha_{13}^3} - \frac{Gm_1}{\alpha_{12}^3}\right] = 0$$

da cui otteniamo le condizioni cercate :

$$\alpha_{13} = \alpha_{12} = \alpha \quad e \quad \omega = \cos t$$

Lo stesso discorso si può ripeter per gli altri due punti materiali e il problema è risolto.
Dunque affinché il triangolo ruoti come un corpo rigido le distanze tra i punti devono essere uguali
e ω = cost.
Uno studente ha cercato di risolvere il problema scrivendo la formula dell'energia potenziale(U) e poi annullandone la derivata prima rispetto ad α.
Ma U richiede due termini :

I) Il termine gravitazionale $-\sum_{coppie} G\frac{m_{ij}}{\alpha_{ij}}$

II) Il termine centrifugo – 1/2 I ω^2
I $= m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2$

Il simbolo $\sum_{coppie}$ implica che nella somma quando i assume il valore 1 j assume i valori 2 e 3 ,

cioè i < j . Poi bisogna eliminare gli r servendosi della (A). Un calcolo voluminoso in cui lo

studente si è smarrito. Altri studenti hanno cercato di risolvere il problema ponendo uguale a zero il momento delle forze , rispetto al centro di massa , che agiscono sul punto materiale P_1.
Ma questa via presuppone una buona conoscenza dell'algebra vettoriale. Qualche lettore vuole ricercare questa soluzione ?

Infine un interessante esercizio che propongo ai lettori è il seguente :

PROVARE CHE LA DERIVATA TEMPORALE DELL'ENERGIA TOTALE DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI , IN INTERAZIONE GRAVITAZIONALE , E' NULLA :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2 - \sum_{coppie} G\frac{m_im_j}{r_{ij}}\right) = 0 \quad \text{(CASO SISTEMA SOLARE)}$$

Le soluzioni dei lettori, che saranno pubblicate, possono essere inviate al curatore di questa rubrica o al responsabile d'Istituto del Progetto Olimpiadi della Matematica Prof. G. Barbara – Liceo Scientifico " V. Fardella " - Trapani.

Antonino Gentile