Riflessioni sulla matematica e le nuove tecnologie nel PNI

L'insegnamento della matematica nelle sezioni PNI del nostro Istituto, mi ha costretto a fare i conti con le connessioni culturali e didattiche che esistono tra l'insegnamento della matematica e l'uso delle nuove tecnologie.

Il problema viene dibattuto ampiamente specialmente da gruppi di docenti che aderiscono ad associazioni specifiche, quali per esempio l'ADT(e a livello internazionale il TTT). Anche il Ministero ha promosso diversi progetti, sia nell'ambito della promozione dell'educazione tecnico – scientifica (progetto SeT), sia con percorsi sperimentali mirati (progetto LABCLASS).

In realtà il problema è ancora più ampio e riguarda **l'insegnamento della matematica , in un tempo dove è possibile affidare al calcolatore la gran parte dei calcoli ripetitivi o codificati anche più complessi.**

Pensiamo, ad esempio, alle operazioni di derivazione e di integrazione che vengono risolti in via immediata da un qualunque ambiente CAS (Computer Algebra System), anzi addirittura da una semplice calcolatrice programmabile.

L'insegnamento diffuso delle regole di derivazione e delle tecniche di integrazione é forse frutto di un tempo in cui tutto questo non era possibile.

Non sarebbe meglio impiegare il tempo necessario a sviluppare i vari metodi di integrazione illustrando più ampiamente i concetti , i teoremi, le applicazioni?

Qui un altro punto importante: quale è il peso delle applicazioni nelle nostre lezioni ?

Se proviamo a sfogliare un libro di Analisi (Calculus) utilizzato negli Stati Uniti, una delle prime cose che si nota è la ricca collezione di applicazioni, in tutti i campi, dei concetti illustrati.

E' corretta la nostra impostazione "teorica" nell'insegnamento della matematica ? Noi siamo convinti che la scuola europea sia la migliore , ma, a livello internazionale, gli articoli di maggior prestigio sono statunitensi. Questo non ci obbliga ad una riflessione ?

Qualche mio alunno mi rivolge spesso la fatidica domanda dopo una dimostrazione particolarmente complessa : "professore, ma tutto questo a cosa serve ?", rispondo con sicurezza "ad educare la mente", mi chiedo, però, se non sia possibile educare la mente attraverso un percorso diverso. Una delle scienze più antiche come la geometria , non si è forse sviluppata da esigenze pratiche ?

In questo ambito più generale l'uso delle NT (Nuove Tecnologie) assume una importanza più rilevante, ma mantiene anche una specificità particolare:

"far acquisire agli allievi il metodo algoritmico nella risoluzione dei problemi".

A questo punto il discorso si fa più tecnico e la scelta dello strumento diventa importante:

E' sufficiente un ambiente CAS anche sofisticato (come DERIVE, CABRI, Mathematica, Matlab, ecc) oppure occorre sviluppare un classico linguaggio di programmazione (tipo Pascal, C,.ecc)?

Infine, la nuova riforma Moratti indica, per i licei scientifici , un percorso che conservi i "**saldi legami con le sue origini ideali, quel Liceo di Atene dove insegnò Aristotele**", e quindi invita a progettare unità didattiche che permettano di "**individuare rapporti storici ed epistemologici tra logica matematica e logica filosofica**" ma anche che permettano di "**conoscere la problematicità dei rapporti esistenti tra scienze dell'intelligenza artificiale e dell'informatica e i formalismi e i problemi del linguaggio matematico**".

Come si vede c'è di che dibattere.

Con la collega di Filosofia, Nicolina D'Angelo, abbiamo voluto realizzare un esempio possibile, che va in una di queste direzioni, affrontando il "paradosso di Zenone" da un punto di vista logico – filosofico e logico - matematico. Gli esiti sull'azione didattica generale non sono stati ancora esaminati. Comunque, potete trovare il lavoro svolto nelle pagine della rivista , potrebbe essere utile per avviare la discussione anche nel nostro Liceo.

Le citazioni sono riportate dal documento del MPI "*I Licei nel secondo ciclo del sistema educativo di istruzione e formazione*"

GIUSEPPE BASIRICÒ

Angolo delle Olimpiadi

Il seguente problema fu proposto alle olimpiadi internazionali di matematica (IMO) del 1961 :

Dimostrare che , per qualunque triangolo di area A e i cui lati misurano a, b, c, vale la relazione

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}A \qquad *$$

L'idea chiave consiste nel congetturare l'uguaglianza nella relazione * per i triangoli equilateri .

Una congettura che ci guiderà per molte delle 10 diverse dimostrazioni che daremo della * .

Un fatto , questo delle 10 dimostrazioni , assai istruttivo per la varietà di tecniche algebriche utilizzate .

PRIMA DIM.

Nel triangolo equilatero con lato di misura c , l'altezza è $\frac{c}{2}\sqrt{3}$.

Qualsiasi altro triangolo con un lato di misura c ha un'altezza relativa a questo lato di $\frac{c}{2}\sqrt{3}$ + y . Essa divide c in due parti $\frac{c}{2}-x$ e $\frac{c}{2}+x$.

Si ha:

$$a^2=\left(y+\frac{c}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{c}{2}+x\right)^2; \quad b^2=\left(y+\frac{c}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-x\right)^2; \quad A=\frac{c}{2}\left(y+\frac{c}{2}\sqrt{3}\right)$$

allora

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}A=\left(\frac{c}{2}-x\right)^2+\left(\frac{c}{2}+x\right)^2+2\left(y+\frac{c}{2}\sqrt{3}\right)^2+c^2-2\sqrt{3}c\left(y+\frac{c}{2}\sqrt{3}\right)=2x^2+2y^2\geq 0$$

L'uguaglianza si ottiene solo per x = y = 0 .

SECONDA DIM.

Sia $a \leq b \leq c$ .Costruiamo un triangolo ABC'su AB e chiamiamo $p=|CC'|$ la deviazione introdotta. Per il teorema di Carnot possiamo scrivere :

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos(\beta - 60°) = a^2 + b^2 - 2\sqrt{3}A - \frac{1}{2}(2ac\cos\beta) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}A}{2} \geq 0$$

dove $2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$

TERZA DIM.

Per assurdo poniamo

$$4A\sqrt{3} \ \phi \ a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2bc\sin\alpha \ \phi \ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Dato che $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 + -a^2$, sommando e quadrando incappiamo in una relazione falsa :

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ \phi \ a^4 + b^4 + c^4 \Leftrightarrow \left(a^2 - b^2\right) + \left(b^2 - c^2\right) + \left(c^2 - a^2\right) \pi \ 0$$

QUARTA DIM.

Usando la formula di Erone e la nota disuguaglianza tra la media aritmetica e la media geometrica possiamo scrivere :

$$16A^2 = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \leq (a + b + c)\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3$$

$$4A \leq \frac{(A + B + C)^2}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 \leq \sqrt{3}\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

QUINTA DIM.

Dalla notissima disuguaglianza

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 2A\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right)$$

e dal fatto che la funzione 1/sin in parentesi è convessa e quindi :

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \geq 3\sin\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

Ne consegue $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}A$.

SESTA DIM.

Generalizziamo :

$$2a^2+2b^2+2c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2ab+2bc+2ca=$$
$$=Q+4A\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)$$

avendo chiamato Q la somma dei quadrati . Notando che l'espressione trigonometrica entro parentesi non supera $2\sqrt{3}$,otteniamo la generalizzazione cercata :

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{Q}{2}+4A\sqrt{3}$$

SETTIMA DIM.

Se sostituiamo al posto di a^2 *in* $a^2+b^2+c^2$ l'espressione $b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ otteniamo :

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}A=2\left(b^2+c^2\right)-2bc\cos\alpha-2bc\sqrt{3}\sin\alpha=$$
$$=2\left(b^2+c^2\right)-4bc\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=$$
$$=2\left[b^2+c^2-4bc\cos\left(60°-\alpha\right)\right]\geq2\left(b^2+c^2-4bc\right)=2(b-c)^2\geq0$$

OTTAVA DIM.

La disuguaglianza * è un caso particolare della relazione di Hadwiger-Finsler scoperta nel 1937 . Tuttavia la * fu trovata da Weitzenböck ben 18 anni prima . Punto di partenza è sempre il teorema del buon Carnot :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha=(b-c)^2+2bc(1-\cos\alpha)=$$
$$=(b-c)^2+4A\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=(b-c)^2+4A\tan\frac{\alpha}{2}$$

e simili espressioni per i quadrati di a e b .

Sommando avremo :

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4A\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right);$$

Dal momento che la funzione tan è convessa in quanto le ampiezze angolari sono comprese tra 0 e 90° , abbiamo :

$$\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)\geq 3\tan\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\sqrt{3}$$

da cui segue la disuguaglianza di Hadwiger-Finsler :

$$a^2+b^2+c^2\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4A\sqrt{3};$$

NONA DIM.

Dalla * elevando al quadrato , otteniamo :

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3(a+b+c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c);$$
$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(2a^2b^2+2c^2a^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4\right);$$
$$4a^4+4b^4+4c^4-4a^2b^2-4b^2c^2-4a^2c^2\geq 0;$$
$$\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)\geq 0$$

DECIMA DIM.

La semplice relazione $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ svolgendo i quadrati diventa :
$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

e sapendo che $ab=\frac{2A}{\sin\gamma}; bc=\frac{2A}{\sin\alpha}; ca=\frac{2A}{\sin\beta}$ otteniamo :
$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=2A\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)$ e procediamo quindi come nella "QUINTA DIM.".

Nei problemi proposti alle olimpiadi di Fisica e Astronomia accade , talvolta , di dover prevedere se una sonda , entrata nel campo gravitazionale di un pianeta , viene rallentata o accelerata .
In generale il problema può essere trattato così :
Una sonda spaziale si avvicina ad un pianeta (esempio: Giove) , interagisce e si allontana . Sia α la direzione di avvicinamento e β quella di allontanamento . Inoltre il pianeta si muove , durante l'interazione con velocità costante v_0 nel riferimento del Sole (riferimento L). Indichiamo , inoltre,
con un apice le coordinate nel riferimento del centro di massa della regione di interazione (riferimento CM) e con v_1 la velocità in iniziale della sonda nel riferimento L .
Possiamo , quindi , scrivere le equazioni da un riferimento all'altro , ricordando le trasformazioni di Galileo

$$x' = x - v_0 t \qquad v'_x = v_x - v_0$$
$$\text{e}$$
$$y' = y \qquad v'_y = v_y$$

Le relazioni di trasformazione sono nel nostro caso :

Componenti di v_1 in L : $v_{1x} = v_1\cos\alpha$; $v_{1y} = v_1\sin\alpha$

Componenti di v'_1 in CM : $v'_{1x} = v_1 \cos\alpha - v_0 ; v'_{1y} = v_1 \sin\alpha$

Modulo di v'_1 in CM :

$$v'_1 = \sqrt{(v_1 \cos\alpha - v_0)^2 + (v_1 \sin\alpha)} = \sqrt{v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha + v_0^2}$$

Indicando con v_2 la velocità finale in L , il modulo della velocità finale in CM sarà :

$$v'_2 = \sqrt{(v_2 \cos\beta - v_0)^2 + (v_2 \sin\beta)^2} = \sqrt{v_2^2 - 2v_0 v_2 \cos\beta + v_0^2}$$

Dal momento che l'interazione gravitazionale è conservativa la velocità della sonda nel centro di massa deve essere la stessa prima e dopo l'urto , quindi :

$$\sqrt{v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha + v_0^2} = \sqrt{v_2^2 - 2v_0 v_2 \cos\beta + v_0^2}$$

Quadrando otteniamo un' equazione per v_2 :

$$v_2^2 - 2v_0 v_2 \cos\beta - \left(v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha\right) = 0$$

che risolta dà :

$$v_2 = v_0 \cos\beta \pm \sqrt{v_0^2 \cos^2 \beta + \left(v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha\right)} \quad **$$

Quale segno scegliere nella ** ? Analizziamo il caso particolare α = β e $v_1 = v_2$ (assenza di interazione).
Sostituendo si trova :

$$v_1 = v_0 \cos\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + \left(v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha\right)} = v_0 \cos\alpha \pm \left|v_1 - v_0 \cos\alpha\right|$$

Se $v_1 \;\phi\; v_0 \cos\alpha$ si ha un'identità se e solo se si prende il segno + , altrimenti se $v_1 \;\pi\; v_0 \cos\alpha$ bisognerebbe prendere il segno - .Ma affinché vi sia interazione deve essere $v_1 \;\phi\; v_0 \cos\alpha$.
Si impone il segno + . La soluzione è quindi :

$$v_2 = v_0 \cos\beta + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \beta + \left(v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha\right)}$$

Se $\beta \;\phi\; \alpha \Rightarrow \cos\beta \;\pi\; \cos\alpha$ e quindi :

$$v_2 = v_0 \cos\beta + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \beta + \left(v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha\right)} \;\pi\; v_0 \cos\alpha + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + \left(v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha\right)} =$$

L'interazione rallenta la sonda , mentre se $\beta \;\pi\; \alpha \Rightarrow \cos\beta \;\phi\; \cos\alpha$ l'interazione accelera l'oggetto .
Vorrei , infine , segnalare ai miei quattro interessati lettori alcuni fatti scientifici scoperti negli ultimi decenni del trascorso secolo :

I) <u>Il teorema di Mason – Stothers</u> ;

II) <u>La disuguaglianza di Easton</u> ;

III) <u>La superespansione di Guth</u> ;

Fatti che hanno in comune rilevanza scientifica e semplicità concettuale .

IL TEOREMA DI MASON – STOTHERS

Indichiamo con i naturali m_i (i = 1 , 2 , 3 , ... , r) la molteplicità delle radici di un polinomio f e con deg(f) il grado del polinomio stesso , allora

$$\deg(f) = m_1 + \ldots\ldots + m_r$$

Inoltre denotiamo con $n_0(f)$ il numero delle radici <u>distinte</u> di f sicché $n_0(f) = r$. Per esempio il polinomio $f(x) = (x - 3)^{1000}$ ha deg(f) = 1000 , ma $n_0(f) = 1$. In generale se f e g sono polinomi non nulli , allora si ha :
$n_0(f\,g) \leq n_0(f) + n_0(g)$
Il segno di uguaglianza vale solo se f e g sono primi tra loro .
Dopo queste permesse notazionali , possiamo enunciare il teorema sui polinomi che era sfuggito ai più sebbene i polinomi siano stati oggetto di attenti studi per centinaia d'anni .

TEOREMA : Siano f , g e h polinomi non costanti primi tra loro soddisfacenti la relazione f + g = h Allora
$\max(\deg(f), \deg(g), \deg(h)) \leq n_0(f\,g\,h) - 1$

Il teorema in maniera molto precisa ci indica quali limiti ci sono per i gradi dei polinomi f , g , h quando essi sono legati dalla relazione f + g = h . L'uso di questo teorema permette pure un agevole dimostrazione del teorema di Fermat per i polinomi :" Non esistono soluzioni dell'equazione
$f^n + g^n = h^n$ quando $n \geq 3$; f , g, h sono al solito polinomi , non costanti , primi tra loro ."
Infatti possiamo scrivere :

$$\deg f^n \leq n_0\left(f^n g^n h^n\right) - 1$$

ma $\deg f^n = n\deg(f)$ $\quad e \quad$ $n_0\left(f^n\right) = n_o(f) \leq \deg f$, quindi :

$$n\deg f \leq \deg f + \deg g + \deg h - 1$$

anche per g e h valgono le relazioni :

$$n\deg g \leq \deg f + \deg g + \deg h - 1$$

$$n\deg h \leq \deg f + \deg g + \deg h - 1$$

che sommate alla prima danno :

$$(n-3)(\deg f + \deg g + \deg h) \leq -3$$

Una relazione chiaramente falsa non appena $n \geq 3$.

La dimostrazione del teorema di Mason – Stothers e le sue interessanti conseguenze si possono leggere nel bel libro di Serge Lang " Math Talks for Undergraduates "- Springer Ed.

LA DISUGUAGLIANZA DI EASTON

La disuguaglianza si esprime con la seguente relazione :

$$IU^2 \geq 2|E|J^2 \quad **$$

Dove $I = \sum m_i r_i^2 =$ momento d'inerzia di un sistema di punti materiali rispetto al solito asse z ;
E = energia totale del sistema legato (< 0); U = energia potenziale del sistema ;
J = modulo momento angolare del sistema . L'asse z ha la stessa direzione di $\vec{J}$. La ** mette in relazione
grandezze che dipendono dalla configurazione del sistema (I e U) con costanti del moto come
E e $\vec{J}$. Per una approfondita discussione sulla genesi della ** e le sue rilevanti conseguenze
consultare le " Lezioni di Astronomia " , di E. Fabri – U. Penco , che si trovano nel sito
www.df.unipi.it~penco

LA SUPERESPANSIONE DI GUTH

La grande incognita del problema cosmologico è la funzione R(t) : il raggio di curvatura dell'universo in funzione del tempo . La funzione obbedisce all'equazione di Friedmann ,
l'uomo che in punta di penna scoprì lo strabiliante fenomeno dell'espansione cosmica .
Equazione la cui forma è :

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{C}{R} = -k \quad ***$$

dove $C = 2GM$ è un numero uguale a due volte la massa contenuta in un volume di raggio R per la costante di gravitazione universale G e k è un altra costante legata alla curvatura dello spazio.
Due annose questioni turbavano , però , le menti dei cosmologi :

I) Perché l'universo appare su larga scala omogeneo e isotropo ?
II) Perché risulta tanto difficile stabilire se l'universo è finito o infinito nel tempo e nello spazio ?
A queste due domande ha risposto la teoria di Guth della superespansione che dopo appena 10^{-31}s dal "Fiat Lux " avrebbe cancellato ogni traccia di disomogeneità del cosmo e appiattito lo spazio rendendo a noi remoti posteri del "Bing Bang " assai difficoltosa l'indagine sulle dimensioni dell'universo . Come è riuscito Guth a estrarre dalla *** l'informazione della superespansione? Dividendo ogni termine dell'equazione di Friedmann per R^2 otteniamo :

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{C}{R^3} = -\frac{k}{R^2}$$

Nelle primissime fasi del " Bing Bang " il termine di curvatura è trascurabile , mentre quello di densità è costante , allora si ha :

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \text{costante}$$

La funzione R(t) ha , quindi , un 'andamento esponenziale !

Per chi volesse approfondire l'argomento , non posso che consigliare vivamente la lettura dell'affascinante libro di Silvio Bergia
"DIALOGO SUL SISTEMA DELL'UNIVERSO" - McGraw-Hill Ed.

Antonino GENTILE

Olimpiadi Nazionali di Astronomia 2002

ESERCIZIO 3 - SESSIONE TEORICA

Descrivete le condizioni climatiche di Urano dato che il suo asse di rotazione giace quasi sul piano dell'eclittica .Calcolate approssimativamente la durata del giorno e delle stagioni. (periodo di rivoluzione di Urano : 83.74 anni giuliani).

SOLUZIONE PROPOSTA

Urano è l'unico pianeta , nel Sistema Solare, ad avere l'asse di rotazione giacente sul piano dell'orbita percorsa attorno al Sole. Esso volge verso il Sole i suoi poli, alternativamente, per un tempo che è pari alla metà del suo periodo di rivoluzione. Essendo tale periodo pari a circa 83.74 anni giuliani, la durata approssimativa del "giorno" è di circa 41.87 anni giuliani. Lo stesso si può dire per la durata della "notte".

Le temperature sono molto basse , visto il basso valore dell'energia che il pianeta riesce a intercettare alla distanza dal Sole di circa 19.13 UA (1 UA = 1.5 10^{11} m, che coincide circa con la media del semiasse maggiore dell'orbita terrestre). Esse oscillano da circa 58 K (-215°C) a circa 65 K (-208 °C).

Le zone più calde sono quelle dei poli mentre quelle più fredde sono quelle dell'equatore.

Nelle zone equatoriali si sono osservati (Voyager 2 - 1986) sistemi di nubi in rapido movimento che hanno permesso di calcolare il periodo di rotazione che risulta essere di circa 3.88 10^4 s (10.78 h) .

ALTRE NOTIZIE SU URANO

Raggio medio dell'orbita

E' possibile calcolare, tramite la terza legge di Keplero, il raggio medio dell'orbita (dell'asse maggiore) :

$$P^2 = a^3$$

Dove a = raggio medio dell'orbita in UA

P = periodo di rivoluzione in anni terrestri

Risulta, con i valori proposti, a = 19.14 UA (2. 87 10^{12} m)

Satelliti

Sono stati rilevati 5 satelliti. I valori dei raggi sono troppo piccoli per essere misurati direttamente. Tali valori vengono stimati sulla base della luminosità osservata e di un'albedo supposta.

Se essi sono ricoperti da ghiaccio il loro raggio potrebbe essere di 100 Km (Miranda) o di 350 Km (Titania).

Nome	Scopritore	Anno della scoperta	Distanza media dal pianeta (km.)	Massa (Luna = 1)
Miranda	G. Kuiper	1948	130.000	0,001
Ariel	W. Lassel	1851	192.000	0,018
Umbriel	W. Lassel	1851	267.000	0,007
Titania	W. Herschel	1787	438.000	0,059
Oberon	W. Herschel	1787	586.000	0,034

Osservare Urano

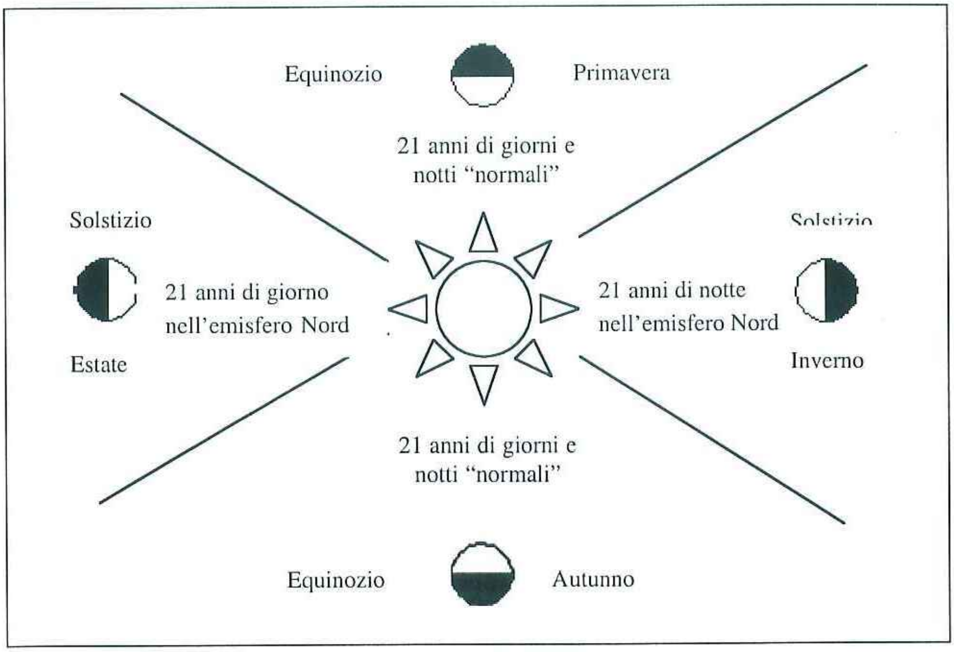
All'osservazione si mostra come un disco blu-verde di 4" d'arco di diametro.

E' più luminoso della sesta magnitudine quindi, teoricamente, dovrebbe essere visibile ad occhio nudo (occorre conoscerne la posizione) per osservarlo, tuttavia, occorrono condizioni ottimali di seeing.

Si può osservare anche con un piccolo telescopio. I satelliti non sono visibili con i telescopi amatoriali, ma richiedono strumenti professionali.

Bibliografia

- Enciclopedie Cambridge ASTRONOMIA - Laterza
- Dale C. Ferguson Astronomy Exercises Brooks/Cole



GIUSEPPE BASIRICÒ