Sezione

Scientifica

Evoluzione Storica del linguaggio Algebrico sino al 500

1.1 INTRODUZIONE

Risolvere equazioni di primo e di secondo grado può sembrare un compito abbastanza semplice per una persona che conosce i rudimenti del algebra e le operazioni nei vari insiemi numerici: interi relativi, razionali o reali.

L'analisi storica mostra, invece, che per molti secoli l'algebra è rimasta indietro rispetto alla geometria e che la costruzione del linguaggio simbolico è stata troppo lenta e difficoltosa. E allora, in assenze di un linguaggio adeguato e di certe conoscenze sugli insieme numerici, come si rappresentavano i diversi tipi di equazioni?, quali algoritmi di risoluzione si utilizzavano?, come influivano le conoscenze aritmetiche e geometriche sullo sviluppo del linguaggio algebrico e sulle tecniche risolutive?. Come si sviluppa la concezione storica di equazione?. In assenza di simbolismo o con un simbolismo molto rudimentale, era possibile classificare i problemi secondo gli algoritmi di risoluzione? La possibilità di ipotizzare la generalizzazione di problemi va sempre accompagnata dall'uso di un simbolismo adeguato? In questa articolo cercheremo di dare risposta ad alcune di queste domande.

Il pensiero algebrico è favorito dall'uso di un simbolismo adeguato e allora nella storia dell'algebra ha importanza non solo la storia dei concetti, ma anche quella dei sistemi di simboli usati per esprimere i medesimi (Arzarello *et al.*, pp. 10-11). Secondo Nesselman si possono individuare tre periodi distinti:

1- FASE RETORICA: anteriore a Diofanto di Alessandria (250 d.C.), nella quale si usa esclusivamente il linguaggio naturale, senza ricorrere a alcun segno.

2- FASE SINCOPATA: da Diofanto fino alla fine del XVI secolo, in cui si introducono alcune abbreviazioni per le incognite e le relazioni di uso più frequente, ma i calcoli sono eseguiti in linguaggio naturale.

3- FASE SIMBOLICA: introdotta da Viète (1540-1603), nella quale si usano le lettere per tutte le quantità e i segni per rappresentare le operazioni, si utilizza il linguaggio simbolico non solo per risolvere equazioni ma anche per provare regole generali.

Alcuni studi più recenti indicano che non è possibile individuare, nel percorso storico, in maniera precisa delle fasi distinte e separate che segnino lo sviluppo del pensiero algebrico. Ogni fase non ha certamente soppiantato di colpo la precedente, il passaggio è stato lento e graduale (Cfr. Malisani, 1996).

Secondo Ferreri e Spagnolo (pp. 90): "Lo studio delle concezioni storiche non è altro che lo studio dei significati legati ad un certo linguaggio in un determinato periodo storico. Un linguaggio nasce con ambiguità semantiche o anche ricchezza di significati all'interno della grammatica. Quando il linguaggio si formalizza si assegna un significato ad ogni formula e si perdono i significati precedenti".

L'obiettivo di questo lavoro è studiare la costruzione del linguaggio algebrico con le sue ambiguità semantiche e la sua ricchezza di significati, in relazione all'evoluzione dei metodi e di strategie di risoluzione di equazioni nei due periodi storici che precedono la formalizzazione: retorico e sincopato. Perché è precisamente nella fase di transizione tra il pensiero aritmetico e il pensiero algebrico nella quale si trova il passaggio tra un campo semiotico significativo *"l'aritmetica"* e il tentativo di mettere a punto un nuovo linguaggio *"l'algebra"* relativo ad una certa classe di problemi *"risoluzione di equazioni"*. Gli ostacoli epistemologici sono legati proprio a questo passaggio (Spagnolo, 1995, pp. 81; Marino e Spagnolo, pp. 131).

Questo capitolo è diviso in quattro parti. Nella prima, si presenta la costruzione storica del linguaggio simbolico dell'algebra; nella seconda, si descrivono i principali metodi di risoluzione di equazioni utilizzati fino al 500; nella terza, si analizza l'incidenza di certi aspetti del linguaggio aritmetico nello sviluppo del linguaggio algebrico; nella quarta, si illustrano i diversi livelli di generalità dei metodi di risoluzione.

1.2. IL SIMBOLISMO

L'analisi dello sviluppo storico dell'algebra mostra che la costruzione del linguaggio simbolico è troppo lenta e difficoltosa, si trovano periodi di miglioramento progressivo ed altri, invece, di regressione e di paralisi. Così per esempio, i babilonesi (≈2000 a.C.), gli egiziani (≈1700 a.C.), i greci (600-200 a.C.) e i cinesi (300 a.C.-300 d.C.) utilizzavano esclusivamente il *linguaggio naturale*, senza ricorrere a alcun segno. Si sono registrati tentativi isolati di introdurre qualche nome o abbreviazione per rappresentare l'incognita, ma queste prove non sono state effettuate in maniera sistematica [(1)].

Diofanto (250 d.C.) introdusse per la prima volta nella Storia della Matematica delle *abbreviazioni* (lettere greche) per rappresentare l'incognita di un'equazione e le sue potenze (Cfr. Kline., pp. 162-163):

$x \rightarrow \zeta$	chiamata	*"il numero del problema o arithme"*
$x^2 \rightarrow \Delta^{\Upsilon}$		*"quadrato" o "potenza"*
$x^3 \rightarrow K^{\Upsilon}$		*"cubo"*
$x^4 \rightarrow \Delta^{\Upsilon}\Delta$		*"quadrato-quadrato"*
$x^5 \rightarrow \Delta K^{\Upsilon}$		*"quadrato-cubo"*
$x^6 \rightarrow K^{\Upsilon}K$		*"cubo-cubo"*
$1/x \rightarrow \zeta^{\chi}$		

Diofanto indicava l'addizione scrivendo i termini l'uno di seguito all'altro, per la sottrazione usava il simbolo /|\ e per la uguaglianza ι^{σ}, non vi erano simboli per rappresentare la moltiplicazione, la divisione e i coefficienti generici. Effettuava i calcoli in *linguaggio naturale* e scriveva le soluzione in un testo continuo. E' interessante osservare che, Diofanto introduce un concetto importantissimo in Algebra: l'*"arithme"* o *il numero del problema* che rappresenta "una quantità indeterminata di unità", cioè l'*incognita* del problema (Ver Eecke, pp. 2; Radford, pp. 43).

A partire del VII secolo gli indiani crearono un simbolismo algebrico abbastanza efficiente che permise loro di sviluppare nuovi procedimenti di risoluzioni di equazioni. Brahmagupta (n. 598) nella sua opera *Brahmasputasiddhanta*, utilizza alcune *abbreviazione* per rappresentare l'incognita e le sue potenze (Cfr. Bortolotti, 1950, pp.. 637):

$x \rightarrow$ *ya* [prima sillaba della parola *yavattavat (tanto-quanto)*]
$x^2 \rightarrow$ *va*
$x^3 \rightarrow$ *gha*
$x^4 \rightarrow$ *vava*
$x^9 \rightarrow$ *ghagha*
$x^{1/2} \rightarrow$ *ka* [prima sillaba della parola *karana (radice quadrata)*]

Gli indiani non usavano nessun simbolo per indicare l'addizione e il prodotto (che veniva rappresentato scrivendo di seguito i due fattori); per la sottrazione, invece, utilizzavano un punto sopra il sottraendo e per l'uguaglianza di due quantità si limitavano a scrivere i due membri in due righe consecutive. Quando in un problema figuravano parecchie incognite, una di esse veniva rappresentata con la sillaba *ya*, le altre con oggetti di diversi colori: praticamente usavano le prime sillabe delle parole relative al rispettivo colore. Questo simbolismo, per quanto rudimentale, è sufficiente per classificare l'algebra indiana come *"quasi-simbolica"* e sicuramente in misura maggiore di quanto lo fosse l'algebra sincopata di Diofanto. I problemi e le soluzioni erano scritti in questo stile sincopato, ma i diversi passaggi non venivano accompagnati con motivazioni o dimostrazioni.

Gli arabi (≈800-1300 d.C.), eredi delle opere greche e indiane, non usavano simboli. Alcuni autori come al-Khowârismî (≈780-≈850) utilizzavano certi nomi particolari per rappresentare le incognite e le sue potenze, ma in generale essi svilupparono un algebra integramente retorica e questo rappresenta un passo indietro rispetto all'algebra diofantina e indiana.

Leonardo Pisano[(2)] (≈1170 - 1250), detto Fibonacci, introdusse in Europa il sistema di numerazione indo-arabico e i procedimenti aritmetici utilizzati dagli arabi e indiani. In questo modo le caratteristiche dell'algebra arabe si trasmisero in Europa e hanno esercitato una forte influenza per più di tre secoli. Nelle opere di Leonardo e nei trattati di abaco del Medioevo, per esempio nel (Anonimo del XIV secolo) si osserva che gli sviluppi algebrici utilizzano fondamentalmente il *linguaggio naturale*. E' importante sottolineare che nel *Trattato d'Algibra* si manifesta una certa tendenza verso il simbolismo perché l'incognita e le sue potenze vengono chiamate con dei nomi particolare:

x	*cosa (o chosa)*
x^2	*censo*
x^3	*chubo*
x^4	*censo di censo*
x^5	*chubo di censi*
x^6	*censo di chubo.*

Le *abbreviazioni* utilizzate nel XVI secolo derivarono precisamente da queste parole. Nell'opera di Pacioli (1445-1514?) si osservano progressi significativi in quanto all'utilizzazione del linguaggio sincopato. Questo autore esegue i calcoli in linguaggio naturale, ma rappresenta l'incognita e le sue potenze (fino alla ventisettesima), mediante nomi e abbreviazioni particolari, per esempio (Loria, pag. 476):

x	*cosa*	*co*	
x^2	*censo*	*ce* o *Z*	
x^3	*chubo*	*cu* o *C*	
x^4	*censo di censo*	*ce ce*	
x^5	*primo relato*	$p^\circ r^\circ$	ecc.

Pacioli usava anche altre *abbreviazioni* come p (per la somma), m (per la sottrazione o per indicare un numero negativo) e *ae* (per uguale: aequalis), R^2 e R^3 (attraversata da una sbarra obliqua) indicano le radici quadratiche e cubiche.

Bombelli (≈1526-≈1572) è responsabile di una autentica trasformazione del linguaggio algebrico con l'introduzione di un simbolo speciale per rappresentare l'incognita e le sue potenze: una semicirconferenza sulla quale veniva scritto un numero che denota l'esponente della potenza (in questo articolo, per semplificare la notazione, la semicirconferenza verrà indicata con una circonferenza):

x^2	*potenza*	②	
x^3	*cubo*	③	
x^4	*potenza di potenza*	④	
x^5	*primo relato*	⑤	e così via.

Questo rappresenta una importante evoluzione del linguaggio simbolico, perché la maggiore parte dei cambiamenti di notazione effettuati fino a quel momento erano essenzialmente abbreviazioni del linguaggio naturale. Bombelli utilizza questo simbolismo "*Sincopato-Avanzato*", risultante da una combinazione tra *linguaggio naturale* e *simbolismo algebrico*, per formulare le regole delle operazioni numeriche e con i polinomi e i procedimenti di risoluzione di equazioni. Questo simbolismo condivide precisamente con l'algebra simbolica di Viète (1540-1603), la caratteristica di "*auto-spiegazione*"; nonostante Bombelli necessiti sempre accompagnare gli sviluppi realizzati dalla sua versione retorica e dimostri la validità delle uguaglianze espresse nei diversi tipi di equazioni mediante le costruzioni geometriche. Questo dimostra che il linguaggio sincopato avanzato utilizzato da Bombelli *non era autosufficiente*, perché bisogna ricorrere ad altri linguaggi, naturale e geometrico che sono semanticamente più ricchi, per completare la comunicazione (Colin e Rojano, pp. 141 - 142).

E' importante osservare che molti cambiamenti di notazione effettuati sino al 500 furono accidentali ed, è chiaro, che gli studiosi di questa epoca non erano in grado di apprezzare quello che il simbolismo poteva significare per l'algebra. Tra il 500 ed il 600 sono stati introdotti la maggior parte dei simboli conosciuti attualmente, ma il processo era molto lento, l'algebra simbolica non soppiantò di colpo quella sincopata.

Alcuni autori (Kline, pp. 303; Loria, pp. 468) ritengono che i tedeschi introdussero i segni $+$ e $-$ per denotare i pesi in eccesso o in difetto delle cassette; questi segni furono poi adottati dai matematici Widman (XV sec.) e Stifel (1486?-1567). Rapisardi (pp. 169), invece, attribuisce l'invenzione di questi segni a Leonardo da Vinci (1452-1519). Il segno $=$ fu introdotto nel 1557 da Recorde (1510-1558) che scrisse il primo trattato inglese di algebra. Viète (1540-1603), che all'inizio utilizzava la parola *aequalis*, poi adottò il simbolo $\sim$ per indicare l'uguaglianza; Descartes (1596-1650), invece, usava α. Oughtred (1574-1660) inventò il segno $\times$ del prodotto e Harriot (1560-1621) usò i segni $>$ e $<$ per denotare le disuguaglianze. Le parentesi tonde compaiono nel 1544, le parentesi quadre e graffe, utilizzate da Viète, risalgono al 1593 circa. La radice quadrata e radice cubica $^{3}\,c$, appaiono nel XVII secolo con Descartes (Cfr. Kline, pag. 304).

Gli esponenti furono introdotti gradualmente. Chuquet (1445?-1500?) nella sua opera *Triparty* scriveva 8^3, 10^5, 12^0 e 7^{1m} per indicare $8x^3$, $10x^5$, 12 e $7x^{-1}$. Bombelli usava una semicirconferenza sulla quale scriveva l'esponente della potenza e Stevin (1548-1620) utilizzava anche gli esponenti frazionari: *1/2* per la radice quadrata ed *1/3* per la radice cubica.

Il cambiamento più significativo nella costruzione del linguaggio algebrico si produsse con il simbolismo di Viète. Questo autore fu il primo ad adottare deliberatamente e sistematicamente le lettere per rappresentare tutte le quantità (l'incognita, le sue potenze e i coefficienti generici). Di solito utilizzava le consonanti per i termini noti e le vocali per le incognite; impiegava il linguaggio simbolico per risolvere equazioni, ma anche per provare regole generali. Viète chiamava la sua algebra simbolica "*logistica speciosa*", in contrasto con la "*logistica numerosa*": considerava che l'algebra è un metodo per operare sulle specie o le forme delle cose; l'aritmetica, *la numerosa*, si occupa invece dei numeri. In questo modo l'algebra diventò lo studio dei tipi generali di forme e di equazioni, perché quello che si applica al caso generale è valido in tutti gli infiniti casi particolari (Kline, pp. 305).

1.3. METODI DI RISOLUZIONE DI EQUAZIONI

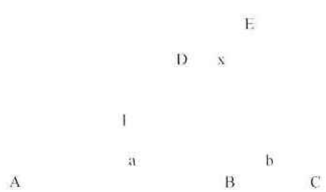
L'obiettivo di questa sezione è presentare un'ampia varietà di metodi di risoluzione di equazioni e mostrare come influiscono le conoscenze aritmetiche e geometriche sull'evoluzione delle tecniche risolutive. I procedimenti sono stati raggruppati secondo il tipo di equazioni: primo, secondo e terzo grado. Nella parte finale della sezione si descrivono in maniera sintetica i metodi utilizzati in Europa da Fibonacci, da un libro dell'abaco (rappresentativo dell'epoca medioevale e rinascimentale) chiamato *Il Trattato d'Algibra* e dagli algebristi del 500.

1.3.1 METODI DI RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

A continuazione realizziamo una descrizione del procedimento geometrico di Euclide, dei metodi della falsa posizione e della "regula infusa".

1.3.1.1 Il procedimento geometrico di Euclide

Gli "*Elementi*" di Euclide contengono alcuni risultati importante dell'algebra moderna, ma trattati geometricamente, per esempio: la risoluzione di equazioni di primo grado. La proposizione 12 del Libro VI degli *Elementi* (1930, pp. 107) chiede di trovare il quarto proporzionale da tre segmenti dati.



$$A B : BC = AD : DE$$

Figura 1

L'applicazione di questa proposizione permette di risolvere "geometricamente" equazioni di primo grado del tipo $ax = b$ con coefficienti positivi, considerando come segmenti: $AB = a$, $BC = b$, $AD = 1$ e $DE = x$.

1.3.1.2 I metodi della falsa posizione

Durante il Medioevo questi procedimenti venivano chiamati con il nome di *regula al-chataim* (parola di origine orientale) o *regula falsorum*. La loro origine è molto antica e si trova precisamente nei matematici egiziani e cinesi. Queste tecniche erano utilizzate spesso dagli indiani e dagli arabi nella risoluzione di problemi e appaiono nella maggior parte dei testi di aritmetica dal Medioevo fino all'inizio della nostra era (Cfr. Guillemot, pp. 1).

I metodi della falsa posizione si applicavano per risolvere equazioni di primo grado ad un'incognita, ed in certi casi, sistemi di equazioni lineari ed equazioni di secondo grado. Ci sono due tipi di metodi: semplice falsa posizione e doppia falsa posizione.

1.3.1.2 .1 Il metodo della semplice falsa posizione

Questo procedimento consiste nell'assegnare *un valore particolare all'incognita* ed effettuare i calcoli necessari per ottenere il risultato esatto: da qui il nome di *semplice* *falsa posizione*. Questa regola si applicava per risolvere problemi lineari, per tanto nei calcoli si utilizza fondamentalmente il concetto di proporzionalità diretta.

L'origine di questo metodo si trova nel papiro Rhind (1700 a.C. circa). Il suo autore, Ahmes, lo applica per risolvere una serie di problemi del tipo: $x + (1/n)\,x = b$, con n e b interi positivi ed $x \in E$, essendo E l'insieme numerico utilizzato dagli egiziani e composto dai numeri naturali non nulli, dalla frazione $2/3$ e dalle frazioni del tipo $1/n$ con n intero positivo [4].

Per esempio, il problema 24 del papiro chiede di "trovare una quantità che aumentata della sua settima parte sia uguale a 19". Il problema tradotto al linguaggio simbolico dell'algebra moderna corrisponde all'equazione: $x + (1/7)\,x = 19$. Ahmes lo risolve in questo modo:

1- Adotta la *falsa posizione* 7, cioè $x = 7$, e allora ottiene $7 + (1/7)\,7 = 8$ anziché 19.

2- Divide 19 per 8 e al risultato lo moltiplica per 7, cioè, applica la proporzionalità diretta: $19 : 8 = x : 7$ e ottiene come risultato $x = 16 + 1/2 + 1/8$ (Cfr. Guillemot, pp. 3).

La manipolazione delle frazioni dell'insieme E risultava abbastanza complessa per gli egiziani, quindi trattavano di evitarle effettuando il minore numero possibile di calcoli. Precisamente il metodo della semplice falsa posizione applicato al problema precedente, permette di sostituire la divisione elementare di 19 per 8 a quella di 19 per $(1 + 1/7)$, assai difficoltosa utilizzando le regole egiziane. Inoltre in tutte le equazione del tipo: $x + (1/n)\,x = b$, Ahmes sceglie la falsa posizione $x_0 = n$, così ottiene al primo membro un valore intero: $n + 1 = b_0$, poi effettua la divisione di b con b_0 e moltiplica il risultato per x_0, cioè: $x = \frac{b}{b_0} \cdot x_0$. In questo modo l'autore sceglie di lavorare con i numeri interi. Tutto ciò dimostra che le difficoltà trovate nell'effettuare i calcoli con le frazioni portarono gli antichi matematici a cercare dei metodi alternativi, mediante i quali potevano risolvere i problemi proposti più facilmente.

1.3.1.2.2 Il metodo della doppia falsa posizione

Questo procedimento consiste nell'assegnare *due valori particolari all'incognita* (da qui il nome di *doppia falsa posizione*), effettuare i calcoli necessari per trovare gli errori commessi utilizzando questi valori e quindi applicare la formula di interpolazione lineare.

Gli autori medioevali non riescono a stabilire con precisione il campo di applicazione di ogni metodo della falsa posizione. Secondo Pellos (1492): "Con il metodo della doppia falsa posizione si possono risolvere problemi più sottili e più complessi, la loro soluzione senza questa regola rappresenta una gran fatica ...". Spesso gli esempi proposti possono anche risolversi applicando il metodo della semplice falsa posizione. Da un'analisi accurata dei testi si determina che frequentemente *i problemi più sottili e più complessi* corrispondono alla risoluzione di: equazioni di primo grado in cui l'incognita si trova in entrambi i membri, sistemi di equazioni lineari ed equazioni di secondo grado (in modo approssimativo) (Guillemot, pp. 12 - 13).

Gli arabi Al-Qalasadi (1423–1494/5) e Beda Eddin (1547-1622) propongono problemi semplici che si potevano risolvere applicando questa regola. Così per esempio: "Trovare un numero che aumentato dei sui $2/3$ e di 1 sia uguale a 10". Algebricamente corrisponde all'equazione: $x + (2/3)\,x + 1 = 10$ con $x \in Q$, che l'autore risolve così:

1- Adotta la falsa posizione: $x_1 = 9$, allora il primo membro è uguale a 16 e la differenza con il secondo membro è $d_1 = 6$.

2- Considera la falsa posizione: $x_2 = 6$, allora il primo membro è uguale a 11 e la differenza è $d_2 = 1$.
3- Applica la formula di interpolazione lineare:

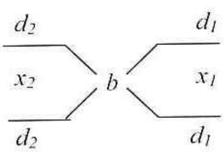
$$x = (x_2 d_1 - x_1 d_2) / (d_1 - d_2) = (6 . 6 - 9 . 1) / (6 - 1) = 5 + 2/5.$$

Questo procedimento che permette di risolvere equazioni del tipo $ax = b$ con $x \in Q$, può essere tradotto al linguaggio algebrico moderno così:

1. Si adotta la falsa posizione x_1 e si ottiene $a x_1 = b + d_1$ [1]
2. Si suppone la falsa posizione x_2 e si trova $a x_2 = b + d_2$ [2]
   d_1 e d_2 vengono chiamati *differenze o errori* ottenuti considerando come valori dell'incognita x_1 e x_2.
3. Si risolve il sistema composto dalle equazioni [1] e [2] in funzione di a e b e si ottengono:
   $a = (d_1 - d_2) / (x_1 - x_2)$ e $b = (x_2 d_1 - x_1 d_2) / (x_1 - x_2)$. [3]

4- Dato che $x = b / a$ si trova: $x = (x_2 d_1 - x_1 d_2) / (d_1 - d_2)$. [4]

Siccome gli arabi non avevano a disposizione la formula, Al-Qalasadi utilizzò l'immagine dei piatti di una bilancia per presentare in modo più chiaro e preciso l'algoritmo eseguito. Altri autori utilizzavano uno schema grafico, nel quale rappresentavano in modo diverso le differenze positive e negative (Loria, pp. 345-346):

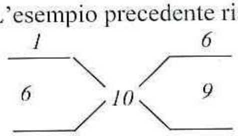


posizione delle differenze con segno positivo

posizione delle differenze con segno negativo

Figura 2

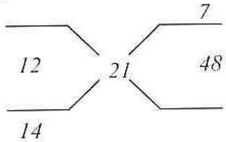
L'esempio precedente risponde allo schema seguente:



$x = (6 . 6 - 9 . 1)/(6 - 1) = 5 + 2/5.$

Figura 3

Al-Qalasadi propone il problema: "Qual è il numero di cui la terza e la quarta parte addizionate sono uguali a 21?". L'equazione da risolvere è: $x/3 + x/4 = 21$; considerando $x_1 = 48$ e $x_2 = 12$ si ottengono rispettivamente le differenze $d_1 = 7$ e $d_2 = -14$, quindi lo schema corrispondente è il seguente:



$x = (12 . 7 + 48 . 14)/(7 + 14) = 36$.

Figura 4

L'autore del *Trattato d'Algibra* (opera del XIV secolo) risolve alcuni sistemi di equazioni lineari mediante l'applicazione di questo algoritmo. Per esempio, il problema 38 può essere tradotto, utilizzando il linguaggio simbolico moderno, in un sistema di quattro equazioni in quattro incognite, che l'autore trasforma mediante sostituzioni successive in un sistemi di due equazioni in due incognite del tipo (Cfr. Franci e Pancanti, pp. 145-150):

$$\begin{cases} 7y = 13x + 4 & [5] \\ 4y = 2x + 176 & [6] \end{cases}$$

che risolve in questo modo:

1. Adotta la falsa posizione $y_1 = 40$ e nell'equazione [5] calcola $x_1 = 21 + 3/13$.
2. Sostituisce questi due valori nell'equazione [6] trovando 160 al primo membro e $218 + 6/13$ al secondo membro. Poiché i due membri dovrebbero essere uguali, la differenza è $d_1 = 58 + 6/13$.
3. Analogamente adottando la falsa posizione $y_2 = 80$, calcola $x_2 = 42 + 10/13$ e $d_2 = -(58 + 6/13)$.
4. Applica la formula [4] e ottiene:

   $y = [80 \,.\, (58 + 6/13) + 40 \,.\, (58 + 6/13)] / (58 + 6/13 + 58 + 6/13) = 60$.
5. Sostituendo $y = 60$ nell'equazione [5] trova $x = 32$.

1.3.1.3 La "regula infusa"

La "regula infusa" è una tecnica utilizzata dagli indiani e dagli arabi per risolvere equazioni di primo grado. Compare in un testo di aritmetica, il cui autore sembra essere Ajjub al Basri, il primo arabo a padroneggiare diverse metodi indiani di risoluzione di equazioni (Cfr. Charbonneau & Radford, pp. 2). In Europa circolò la versione latina di questo testo intitolata *Liber augmentis et diminutionis* tradotta da Abraham ben Ezra (nell'XI secolo). Questa opera contiene anche numerosi problemi risolti con la regola della falsa posizione.

L'autore non dà una definizione precisa della regula infusa, ma la spiega attraverso la sua applicazione ad alcune situazioni pratiche che si traducono in equazioni della forma generale: $x + x/n = k$. Di conseguenza, questa tecnica permette di risolvere equazioni lineari che presentano la difficoltà di manipolare termini frazionari.

Per esempio, uno dei problemi è il seguente (Libri 1838-1841, pp. 321): "Un tesoro è incrementato della sua terza parte. Poi la quarta parte di questo è addizionato alla prima somma. La nuova somma è 30. Quanto era il tesoro originalmente?

Il problema espresso nel linguaggio simbolico attuale diventa:

$$x \;\frac{1}{3}\cdot x \;\frac{1}{4}\cdot x \;\frac{1}{3}\cdot x = 30$$

Ricordiamo che nell'algebra medioevale l'incognita viene indicata con la parola *cosa* o *res* che in questo caso rappresenta il tesoro; noi la abbiamo simbolizzata con x.

L'autore divise il problema in due sottoproblemi più semplici. Nel primo considerò $x \;\frac{1}{3}\cdot x$ come una *res*, cioè, in notazione moderna $y = x \;\frac{1}{3}\cdot x$. Quindi il primo sottoproblema era risolvere l'equazione: $y \;\frac{1}{4}\cdot y = 30$. Una volta calcolato il valore di y, il secondo sottoproblema era trovare la soluzione di $y = x \;\frac{1}{3}\cdot x$. A continuazione proponiamo una tabella con la soluzione in linguaggio naturale, così come compare nel testo, e la relativa traduzione al linguaggio algebrico (Cfr. Charbonneau & Radford, pp. 3):

Soluzione proposta nel *Liber augmentis et diminutionis*	**Traduzione al linguaggio simbolico dell'algebra**
Prendi una *res* e sommale un quarto di essa e tu avrai così una *res* e un quarto di *res*.	$y \quad \frac{1}{4} \cdot y$
Quanto si deve prendere di una *res* e un quarto di *res* per portarla ad una *res?* Troverai che è un quinto di essa.	$y \quad \frac{1}{4} \cdot y = 30$ quindi $\frac{5}{4} \cdot y = 30$. Per ridurre questo a "y", si deve sottrarre $\frac{1}{5}$ di $\frac{5}{4} \cdot y$ ad entrambi i membri dell'equazione: $\frac{5}{4} \cdot y \quad \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot y = 30 \quad \frac{1}{5} \cdot 30$
Sottrai perciò da 30 il suo quinto e rimarrà 24.	Questo è $y = 30 - 6 = 24$
Poi prendi la seconda *res* e addizionala al suo terzo e avrai una *res* e un suo terzo.	$x \quad \frac{1}{3} \cdot x$
Quanto si deve prendere di una *res* e un terzo di *res* per portarla ad una *res?* Troverai, infatti, che è un quarto di essa.	$x \quad \frac{1}{3} \cdot x = 24$ quindi $\frac{4}{3} \cdot x = 24$. Per ridurre questo a "x", si deve sottrarre $\frac{1}{4}$ di $\frac{4}{3} \cdot x$ ad entrambi i membri dell'equazione: $\frac{4}{3} \cdot x \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot x = 24 \quad \frac{1}{4} \cdot 24$
Quindi sottrai da 24 il suo quarto e rimarrà 18	$x = 24 - 6 = 18$

1.3.2 METODI DI RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

A continuazione presentiamo il procedimento geometrico di Euclide, il metodo di al-Khowârizmî e la *geometria taglia-incolla*.

1.3.2.1 IL PROCEDIMENTO GEOMETRICO DI EUCLIDE

Negli "*Elementi*" di Euclide troviamo anche la risoluzione di equazioni di secondo grado da un punto di vista geometrico.

A partire dalle proposizioni 28 e 29 del Libro VI (1930, pp. 146-150), si possono risolvere geometricamente le equazioni di secondo grado che ammettono almeno una radice positiva [5]. Così, per esempio, l'equazione $ax - x^2 = b^2$ corrisponde al problema geometrico: *Su un segmento dato (a) preso come base, costruire un rettangolo (di altezza x) che superi il quadrato dell'altezza (x^2) di un'area equivalente ad un quadrato dato (b^2)* (Cfr. Zapelloni, pp. 150). Per risolverlo si procede in questo modo:

Siano a il segmento dato e

C il quadrato di area b^2:

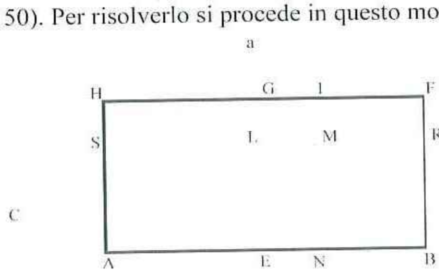


Figura 5

1- Si divida il segmento $a = AB$ in due parti uguali, nel punto E; su EB si costruisca il quadrato $EBFG$ e si completi il quadrato $AEGH$. L'area del quadrato $AEGH$ deve essere maggiore o uguale a b^2, altrimenti il problema non ha soluzione.

2- Se l'area del quadrato $AEGH$ è b^2, allora $x = AH$ *e il problema è risolto.*

3- Se l'area del quadrato $AEGH$ è maggiore di b^2, si costruisca il quadrato $LMIG$ di area uguale alle differenze delle aree. Allora i quadrati $LMIG$ e $NBRM$ sono disposti intorno alla stessa diagonale (prop. 26, Libro VI), sia GB e si completi la figura.

4- Per costruzione l'area della figura $LEBFIM$ risulta uguale a b^2, facilmente si dimostra che l'area del rettangolo $ANMS$ è uguale a quella di $LEBFIM$ e pertanto uguale a b^2. Allora $x = SA$.

1.3.2.2 Il procedimento di al-Khowârizmî

Gli arabi risolvevano le equazioni di secondo grado considerando separatamente cinque casi diversi:

$$a\,x^2 = bx\,, \quad a\,x^2 = c\,, \quad a\,x^2 + bx = c\,, \quad a\,x^2 + c = bx\,, \quad a\,x^2 = bx + c$$

in modo che i coefficienti a, b e c siano sempre positivi. Questo modo di procedere per evitare i numeri negativi è simile a quello proposto da Diofanto; ma significa un passo indietro rispetto all'algebra indiana, che considerava la "forma generale" dell'equazione di secondo grado perché erano ammessi i coefficienti negativi.

Una delle equazioni risolta da al-Khowârizmî [(6)] è la seguente: "*Un quadrato e dieci delle sue radici sono uguale a nove e trenta* (per trentanove), *cioè tu sommi dieci radici a un quadrato e la somma è uguale a nove e trenta*" (Kline, pag. 226). Questo enunciato, tradotto al linguaggio simbolico dell'algebra, corrisponde all'equazione: $x^2 + 10\,x = 39$. L'autore utilizza il metodo del completamento del quadrato per calcolare la soluzione positiva:

Soluzione proposta da al-Khowârismî:	Notazione algebrica moderna:
1. *"Considera la metà del numero delle radici, in questo caso cinque, poi moltiplicalo per se stesso, il risultado è cinque e venti" (per venticinque)".*	$x^2 + 10\,x = 39$
2. *"Somma questo numero a nove e trenta* (per trenta e nove), *il che dà sessantaquattro".*	$(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$
3. *"Prendi la radice quadrata, cioè otto".*	$x + 5 = 8$
4. *"Sottrai da essa la metà del numero delle radici, cioè cinque, e rimane tre".* 5. *"Questa è la radice".*	$x = 3$

Alcune varianti di questa regola si trovano nella matematica babilonese e indiana che, molto probabilmente, erano già conosciute dagli arabi. Ma al-Khowârizmî, dopo aver trovato le soluzioni numeriche dei cinque tipi di equazioni, dimostra "geometricamente" la verità degli stessi problemi. Per esempio, il suo approccio geometrico per l'equazione $x^2 + 10\,x = 39$ è il seguente (Cfr. Gheverghese Joseph, pp. 320-321):

1. Considera un quadrato $ABCD$ di lato x.
2. Prolunga AD e AB fino ad E e F, in modo che $DE = BF = 5$.
3. Completa il quadrato $AFKE$, prolunga DC fino a G e BC fino ad H.
4. Dal diagramma risulta che l'area di $AFKE = x^2 + 10\,x + 25 = (x + 5)^2$.
5. Addiziona 25 ad entrambi i membri dell'equazione $x^2 + 10\,x = 39$, quindi si ha $x^2 + 10\,x + 25 = 39 + 25 = 64$

6. Dall'uguaglianza ricava che un lato del quadrato *AFKE*, diciamo *EK* è $x + 5 = 8$ e allora $EH = x = 3$.

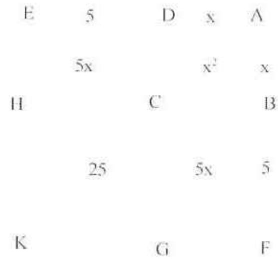


Figura 6

1.3.2.3 La geometria "taglia-incolla"

Il *Liber Mensuratonium* di Abû Bekr (IX secolo circa) è un testo che contiene numerosi problemi risolti con due metodo diversi. Uno di questi metodi utilizza l'algebra sincopata, l'altro, invece, non ha un nome specifico e Høyrup (1990) lo ha chiamato *"geometria taglia-incolla"*.

Per esempio, l'enunciato del problema 25 dice che: "L'area è 48 e la somma dei due lati è 14, quanto misura ciascun lato?".

Questo problema espresso in linguaggio algebrico risulta: $x \,.\, y = 48$ e $x + y = 14$ che corrisponde all'equazione: $x^2 - 14\,x + 48 = 0$. L'autore applica il metodo della *"geometria taglia-incolla"* e spiega la risoluzione in questo modo (Cfr. Charbonneau & Radford, pp. 5):

1. Dividi a metà il 14, il risultato sarà 7
2. Moltiplica il 7 per se stesso e sarà 49
3. Sottrai da esso il 48 e rimarrà 1, del quale si ottiene la radice che è 1
4. Se addizionerai a 1 la metà di 14, quello che risulterà sarà il lato maggiore.
5. Se sottrarrai questo numero dalla metà di 14, quello che risulterà sarà il lato minore.

Anche se l'autore non lo dichiara in modo esplicito, il problema in questione è trovare la lunghezza dei lati di un rettangolo che soddisfano determinate condizioni. Charbonneau & Radford (pp. 5) ritengono che probabilmente la soluzione era accompagnata da alcuni disegni che non si trovano nel testo e che il testo avrebbe avuto soltanto un ruolo di aiuta-memoria. Questi autori propongono la seguente sequenza di disegni (pp. 6):

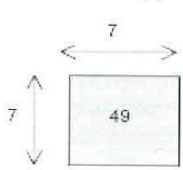
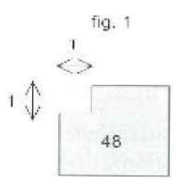
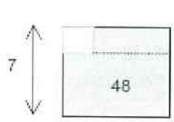
1. 

fig. 1

Costruire una quadrato di lato uguale alla metà di 14: passaggi 1 e 2 del procedimento spiegato precedentemente

2. 

Passaggio 3

3. 

Applicare il metodo della "geometria taglia e incolla"

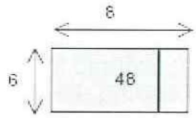
4. 

fig. 4

Passaggi 4 e 5

1.3.3 METODI DI RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI TERZO GRADO

1.3.3.1. IL PROCEDIMENTO DI AL-KHAYYAM

Uno dei più interessanti progressi della matematica araba è la risoluzione di equazioni cubiche mediante l'intersezione di sezioni coniche. Dopo la diffusione del *Trattato di Algebra* (*Al-jabr w'al muqâbala)* di al-Khowârizmî si svilupparono due correnti di idee:

- certi problema geometrico si possono ricondurre alla risoluzione di un'equazione algebrica ad un'incognita;
- la risoluzione di un'equazione di terzo grado, per esempio, si può ricondurre ad una costruzione geometrica.

Secondo Rashed, il contributo più importante della matematica araba è precisamente l'avere iniziato lo sviluppo di questa corrispondenza tra la geometria e l'algebra cinque secoli prima di Descartes e di Fermat.

Con al-Khayyam (1038/48-1123) *l'Algebra* diventa *la teoria generale delle equazioni algebriche* di grado minore o uguale a tre e con coefficienti interi positivi. Questo autore risolve le *equazioni di secondo grado* con radici positive utilizzando il procedimento geometrico di Euclide. Trova anche la soluzione generale per tutte le *equazioni di terzo grado* (con radici positive e non riconducibili ad equazioni di secondo grado) mediante intersezioni di curve coniche (Cfr. Ballieu, pp. 12). Così, per esempio, per risolvere l'equazione: $x^3 + ax = b$ con a e b positivi, al-Khayyam scrive la forma omogenea $x^3 + p^2x = p^2q$ con $p^2 = a$ e $p^2q = b$.

Successivamente costruisce la parabola di equazione $y = x^2/p$ e la circonferenza di diametro QR di lunghezza uguale a q, che corrisponde all'equazione è $x^2 + y^2 - q\,x = 0$. Per il punto P di intersezione delle due curve (diverso dall'origine delle coordinate) traccia la perpendicolare PS e dimostra che QS è la soluzione dell'equazione. A partire dalla costruzione geometrica deduce che questo tipo di equazione ammette sempre una radice positiva.

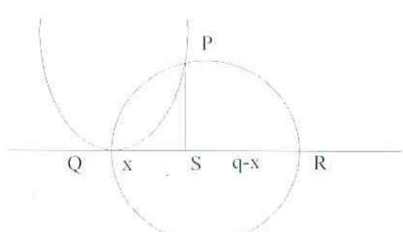


Figura 7

Al-Khayyam realizza una dimostrazione di tipo sintetico utilizzando la teoria delle proporzioni. Applica la proprietà della parabola scoperta da Apollonio: $x\,/PS = p/x$. [1]

Considera triangolo rettangolo QPR, nel quale l'altezza PS è medio proporzionale fra QS ed RS: $x\,/PS = PS\,/(q - x)$. [2]

Da [1] e [2] ricava che: $p\,/x = PS\,/(q - x)$. [3]

A partire dall'equazione [1] ottiene che $PS = x^2/p$. Sostituendo questo valore nella [3] dimostra che x soddisfa l'equazione: $x^3 + p^2x = p^2q$ (Cfr. Kline, pp. 227-228)

Al-Khayyam risolse anche equazioni del tipo: $x^3 + a = bx$ per a e b positivi, con l'aiuto della parabola $y = x^2/b$ e di una branca dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 - (a/b)x = 0$. Dimostrò che questo tipo di equazioni può ammettere: due soluzioni positive, una o nessuna (non prendeva in considerazione le soluzioni negative).

Determinò anche le radici dell'equazione: $x^3 + a\,x^2 = c^3$ mediante l'intersezione di un'iperbole e di una parabola e quelle dell'equazione: $x^3 \pm a\,x^2 + b^2\,x = b^2\,c$ dall'intersezione di un'ellisse con un'iperbole.

1.3.3.2. Il procedimento di al-Tusi

Al-Tusi (1130-?) classificò le equazioni di grado minore o uguale a tre secondo l'esistenza o meno di radici positive. In particolare, studiò cinque tipi di equazioni che ammettono —utilizzando la sua espressione— "casi impossibili", cioè, i casi che non ammettono soluzioni positive:

$x^3 + c = ax^2$

$x^3 + c = bx$

$x^3 + ax^2 + c = bx$

$x^3 + bx + c = ax^2$

$x^3 + c = ax^2 + bx$.

Ogni equazione di questo tipo si può scrivere nella forma $f(x) = c$ dove f è un polinomio. Al-Tusi caratterizza i "casi impossibili" studiando l'intersezione della curva $y = f(x)$ con la retta di equazione $y = c$ per $x > 0$ e $f(x) > 0$. L'esistenza di soluzioni dipende dalla posizione della retta $y = c$ in relazione a $f(x_0)$, dove x_0 è il massimo della funzione polinomiale. Se la retta interseca la funzione, determina le radici di $f(x) = 0$ e questo gli permette di inquadrare le radici di $f(x) = c$, cioè le radici di $f(x) = 0$ determinano l'intervallo che contiene le radici de $f(x) = c$ (Cfr. Ballieu, pp. 16). Al-Tusi calcola le radici con l'aiuto di un metodo analogo a quello di *Ruffini-Horner*. Ballieu (pp. 16) ritiene che nel XI secolo questo metodo era utilizzato nel calcolo delle radici quadrate e cubiche e che al-Tusi lo generalizzò applicandolo alla risoluzione di equazioni polinomiche.

Al-Tusi applica così l'analisi locale: per trovare il massimo di $f(x)$ risolve un'equazione che tradotta al linguaggio simbolico moderno corrisponde a $f'(x) = 0$, cioè introduce la nozione di derivata che utilizza soltanto in alcuni esempi, senza arrivare a formalizzare il concetto. Questo autore adopera un'approssimazione locale e analitica che si oppone al procedimento globale e algebrico adottato da al-Khayyam. Il linguaggio utilizzato, sprovvisto di formalismo, è poco favorevole alla manipolazione di tali strutture matematiche. In ogni caso, secondo Ballieu (pp. 16) sembra che, per la prima volta nella Storia della Matematica, si trova l'idea di calcolare il massimo di una funzione polinomiale. Per effettuarlo al-Tusi studia la variazione della funzione nelle vicinanze degli estremi. Questo autore manipola concetti nuovi, ovviamente senza il rigore di un Newton, però ricordiamo che questo accade nel XII secolo!

1.3.4 I METODI EUROPEI FINO AL 500

Nella sua opera il *Liber Abaci* (1202) Fibonacci risolve numerosi problemi di ordine pratico (relativi alle transazioni commerciali), utilizzando la successione numerica che oggi porta il suo nome (ogni numero è ricavato dalla somma dei due precedenti immediati) o l'analisi indeterminata di primo e di secondo grado. E' interessante osservare che, per risolvere equazioni di secondo grado, Leonardo segue lo stile diofantino e arabo considerando separatamente cinque casi diversi in modo che i coefficienti risultino sempre positivi. Per ciascuno di essi, poi, trova le soluzioni utilizzando i ragionamenti geometrici di Euclide. Risolve le innumerevoli questioni di analisi indeterminata applicando diversi artifici diofantini o il metodo della falsa posizione (Cfr. Loria, pp. 386-391).

L'autore del *Trattato d'Algibra* (XIV secolo) stabilisce 25 regole per risolvere equazioni dei primi quattro gradi considerando separatamente diversi casi particolari per le equazioni dello stesso grado, superiore al primo, in modo che i coefficienti risultino sempre positivi[7]. Egli prosegue con la tradizione araba di accettare soltanto le soluzioni reali positive non nulle. Risolve le prime 22 equazioni applicando il trasporto di termini da un membro all'altro e la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado per calcolare soltanto la radice positiva. Trasforma le equazioni biquadratiche in quadratiche e certe equazioni cubiche e quartiche in equazioni di secondo grado dividendole per l'incognita o il suo quadrato. E' importante sottolineare che queste osservazioni possono sembrare ovvie a chi è abituato ad utilizzare il simbolismo algebrico, ma sono molto meno triviali per l'autore che le formulò disponendo soltanto dal linguaggio naturale. Le ultime tre regole[7] corrispondono a equazioni di terzo grado del tipo: $ax^3 + bx^2 = c$, $ax^3 = bx^2 + c$ e $ax^3 + c = bx^2$. Per calcolare questo tipo di radici, l'autore effettua delle sostituzioni adeguate (per esempio, nella prima utilizza $x = y - b/3a$) trasformando queste equazioni in altre del tipo $x^3 = px + q$, che poi calcola mediante tentativi perché non conosce la sua formula risolutiva. Secondo Franci e Pancanti (pag. XX): l'importanza delle regole in questione è ancora maggiore se si considera che la risoluzione dell'equazione generale di terzo grado $x^3 + a x^2 + b x + c = 0$, passa proprio attraverso la risoluzione delle equazioni del tipo $y^3 + p y + q = 0$, alle quali si arriva mediante la trasformazione $x = y - a/3$. Questa è precisamente la regola proposta nel *Trattato d'Algibra* ed è la prima di questo genere nella letteratura matematica.

Intorno al 1500 Scipione Dal Ferro (1465-1526) enunciò la formula risolutiva delle equazioni cubiche del tipo $x^3 + px = q$ con p e q positivi, utilizzando il linguaggio naturale. Questa formula tradotta la linguaggio simbolico dell'algebra corrisponde all'espressione:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}^{2} \quad \frac{p}{3}^{2} \quad \frac{q}{2}} \qquad \sqrt[3]{\frac{q}{2}^{2} \quad \frac{p}{3}^{2} \quad \frac{q}{2}}$$

Nel 1535, in maniera indipendente Tartaglia scoprì la formula risolutiva per le equazioni cubiche a coefficienti positivi del tipo: $x^3 + px = q$ e $x^3 + q = px$, che furono pubblicate nel 1545 da Cardano nella sua opera *Ars magna*. In essa l'autore riporta il metodo di risoluzione delle equazioni cubiche e, seguendo la tradizione arabe, realizza una dimostrazione geometrica per ogni regola ottenuta. Presenta anche il procedimento risolutivo per alcune equazioni quartiche, scoperto da Ferrari. Cardano stabilisce le condizioni perché il numero delle radici di un'equazione (di secondo e terzo grado) sia uguale al suo grado, insieme con le regole per abbassare il grado di un'equazione di cui è nota una radice (Cfr. Bortolotti, 1950, pp. 656-657).

Nella sua opera *L'Algebra* (1966), Bombelli sviluppa la teoria delle equazioni dei primi quattro gradi[8]. Considera separatamente tanti casi particolare di equazioni dello stesso grado, superiore al primo, in modo che i coefficienti siano sempre positivi. Per ogni tipo di equazione enuncia (in linguaggio retorico) la "regola" pratica di risoluzione, realizza la costruzione geometrica (per quanto sia possibile) per giustificare la validità dell'uguaglianza formulata nell'equazione e analizza la natura e la molteplicità delle radici. Segue la tradizione arabe e medioevale di accettare soltanto le soluzioni reali positive non nulle, perché le radici negative o complesse erano difficili di interpretare in modo adeguato, in relazione ai problemi da risolvere.

Bombelli utilizza la costruzione geometrica per risolvere problemi algebrici, ma il suo procedimento è l'inverso di quello seguito nell'algebra geometrica degli antichi. Questo autore non risolve direttamente il problema geometrico per ottenere la soluzione analitica dall'interpretazione aritmetica della costruzione realizzata, ma utilizza precisamente la risoluzione algebrica per ricavare la costruzione geometrica (Bortolotti, 1966, pp. XLIII).

1.3.5 CONCLUSIONI SUI METODI DI RISOLUZIONI

L'analisi storica realizzata mostra una ampia gamma di procedimenti ideati appositamente per risolvere equazioni. Questi metodi evidenziano la necessità di ricorrere ad altri di linguaggi: naturale, aritmetico o geometrico, in mancanza di un linguaggio simbolico adeguato. Il linguaggio aritmetico fu utilizzato ampiamente dai popoli antichi, da Diofanto e dai matematici cinesi e indiani. Questo linguaggio costituisce anche il fondamento del metodo della falsa posizione, applicato dai matematici egiziani, cinesi, indiani, arabi fino a quelli medioevali. Il linguaggio geometrico è usato nei metodi risolutivi dai greci classici, da al-Khowârizmî e da al-Khayyam e nel procedimento che Høyrup chiama "geometria taglia-incolla". Alcune nozioni protomatematiche di analisi furono adoperate da al-Tusi[(9)]. E' interessante sottolineare che, fino al 500 la lingua naturale era utilizzata come mediatore e nell'ultimo periodo come supporto di riflessione; mentre l'aritmetica e la geometria rappresentavano due linguaggi di supporto di espressione e/o procedurale. La geometria, in particolare, ha contribuito notevolmente al processo di argomentazione-dimostrazione. In tutti questi casi il livello di sviluppo del linguaggio algebrico era molto scarso e allora era necessario ricorre ad altri linguaggi (naturale, aritmetico, geometrico o analitico) per ottenere la soluzione del problema a partire dall'interpretazione dei procedimenti eseguiti. Anche Bombelli utilizzava la costruzione geometrica per giustificare la validità delle uguaglianze formulate nelle equazioni o per risolvere problemi algebrici, ma la sua procedura era diversa a quella seguita nei casi citati precedentemente. In questa situazione l'impiego di altri linguaggi -naturale o geometrico- serviva soltanto a completare la comunicazione, non a risolvere il problema, perché Bombelli utilizzava uno schema di ragionamento diverso, combinando strumenti algebrici ed euclidei.

La semantica del linguaggio algebrico è meno ricca di quelle corrispondenti al linguaggio naturale, aritmetico o geometrico. Quindi nella fase sincopata è necessario appoggiarsi in altre semantiche per formulare le regole, per dare un'interpretazione adeguata al problema da risolvere, per ottenere la sua soluzione o anche per giustificare i passaggi effettuati algebricamente. L'ambiguità semantica e la ricchezza di significati sono precisamente quelle che permettono a poco a poco di mettere a punto il linguaggio simbolico

La "regula infusa" e il "metodo della falsa posizione" utilizzano la lingua naturale e il linguaggio aritmetico. Da un confronto si evince che la prima è più restrittiva perché si usa soltanto per risolvere equazioni del tipo $x + x/n = k$. Mentre la seconda ha un campo di applicazione più ampio: equazioni e sistemi di equazioni lineari ed equazioni quadratiche in modo approssimativo. D'altra parte, l'uguaglianza ha un significato diverso in questi due procedimenti. Nel metodo della falsa posizione essa indica il risultato di un'operazione aritmetica, ottenuto da sostituire un valore qualsiasi all'incognita. Nella "regula infusa", invece, l'uguaglianza rappresenta, in qualche modo, l'equivalenza tra i due stili di esprimere la stessa quantità: k è interpretata come le *(n + 1)/n* parti dell'incognita. Questa nozione è più vicina a quella utilizzata in algebra (Cfr. Charbonneau & Radford, pp. 4).

Nel procedimento di al-Khowârizmî e nella *geometria taglia-incolla* il concetto di uguaglianza rappresenta, invece, l'equivalenza (uguaglianza tra le aree) di figure piane. Questi metodi si basano fondamentalmente sull'applicazione di una serie di trasformazione ad una figura iniziale fino ad arrivare ad una figura finale di area conosciuta. Anche la dimostrazione di Euclide per la risoluzione di equazioni di secondo grado passa attraverso il concetto di uguaglianza di aree.

1.4 I NUMERI NEGATIVI COME OSTACOLO. IL CAMPO NUMERICO INCOMPLETO

Anche se da un certo punto di vista l'uso del linguaggio aritmetico favorisce lo sviluppo del linguaggio algebrico, da un altro può rappresentare una forte limitazione. Si suppone, per esempio, che i laboriosi e complicati calcoli con le frazioni rappresentano uno dei motivi per cui il linguaggio algebrico degli egiziani non ha superato il primo livello di sviluppo[(4)]. La mancanza di accettazione dei numeri negativi da parte di Diofanto, degli arabi e dei matematici europei fino al cinquecento è la causa per cui essi evitavano i coefficienti negativi nella formulazione delle regole di risoluzione e ammettevano soltanto le radici positive (le radici negative risultavano difficili di interpretare adeguatamente, in relazione ai problemi che permettevano risolvere). Questo rappresenta un passo indietro rispetto all'algebra indiana che considerava la forma generale dell'equazione di secondo grado ed in alcuni casi ammetteva anche le soluzioni negative (quando era possibile trovarle un'interpretazione). Nello stesso modo, la sua mancanza di accettazione dei numeri complessi è il motivo per cui Bombelli non li ammetteva come radici delle equazioni. Alcuni autori (Bortolotti, 1966, pp. 182) ritengono che sia possibile che le stesse dimostrazioni e le costruzioni geometriche delle soluzioni algebriche delle equazioni, abbiano distolto lo sguardo dei matematici (anche di Bombelli) da questo tipo di radici. Ma nel Libro IV del*L'Algebra*, Bombelli introduce i segmenti negativi e le aree negative o nulle per poter operare con essi. Riteniamo che la vera difficoltà per accettare le radici negative si trovi precisamente negli stessi numeri negativi come ostacolo epistemologico a livello aritmetico (Cfr. Glaeser).

Leonardo Pisano aveva già fatto qualche osservazione e poi i matematici del cinquecento si si sono convinti che l'impossibilità di risolvere certe equazioni del terzo grado dipendeva dall'incompletezza del campo numerico che non conteneva gli elementi idonei per esprimere la soluzione. Così Bombelli effettuò le successive estensioni del campo euclideo di razionalità con l'introduzione prima dei radicali cubici e dopo dei numeri complessi.

E' importante sottolineare che la necessità di ampliare il campo numerico con i numeri complessi apparve con la risoluzioni delle equazioni cubiche non di quelle quadratiche. Cioè l'ostacolo del numero complesso non dipendeva dal tipo di equazione o di problema, ma dal procedimento seguito nella risoluzione. Perché, fino a quel momento, la presenza della radice quadrata di un numero negativo implicava l'assenza di soluzioni; mentre nelle equazioni di terzo grado non succedeva lo stesso: a volte era possibile trovare un'espressione immaginaria nel procedimento di risoluzione, anche se tutti e tre le radici fossero reali[(10)]. Questo significava dovere lasciare il procedimento di risoluzione incompleto per mancanza di trasformazioni algebriche adeguate che permettessero di concluderlo. Di conseguenza la formula risolutiva di Dal Ferro-Tartaglia non offriva la possibilità di calcolare la radice positiva, la cui esistenza spesso si poteva verificare mediante una semplice sostituzione. Cioè, l'impossibilità di eseguire un processo computazionale, creò la necessità di introdurre nuovi oggetti algebrici di natura più astratta: i numeri complessi. Bombelli aveva definito le regole di calcolo con le irrazionalità cubiche e con i numeri complessi, ma i matematici dell'epoca non li accettavano come dei "veri" numeri, cioè come oggetti astratti. E' importante sottolineare che nel*L'Algebra* si trova ancora una concezione operativa dei numeri irrazionali e complessi, la concezione strutturale di questi numeri (come veri oggetti) arriverà nei secoli successivi (Arzarello *et al.*, pp. 9).

Nello sviluppo storico del linguaggio algebrico troviamo con frequenza che i matematici manifestano delle ambiguità per operare in determinate situazioni con nuovi oggetti astratti, per esempio: da una parte si osserva la mancanza di accettazione dei numeri negativi come coefficienti o radici delle equazioni; d'altra, se essi sono necessari per portare a termine il processo di risoluzione di un problema particolare, allora vengono utilizzati in queste funzioni. Numerosi esempi di questo tipo si trovano nel *Trattato d'Algibra* e nel*L'Algebra* di Bombelli. Ma rimane aperto il problema se queste ambiguità siano o meno dovute all'ostacolo epistemologico che rappresentano i numeri negativi (Malisani, 1996, pp.68).

1.5 GENERALIZZAZIONE DEI PROBLEMI

Un aspètto molto importante della costruzione del linguaggio algebrico e la possibilità di ipotizzare la generalizzazione di problemi. I matematici antichi e orientali non disponevano da metodi generali, risolvevano ogni problema in un modo diverso, cioè non cercavano analogie per classificarli in gruppi di problemi simili. Nel *Liber Quadratorum* (1225) di Leonardo Pisano, invece, si manifesta già una certa tendenza di risolvere problemi cercando di inserirli in famiglie o classi di problemi (Cfr. Leonard de Pisa, pp. 43). Nel *Trattato d'Algibra* l'autore classifica i problemi secondo le regole di risoluzione e trasforma le equazioni biquadratiche in quadratiche e certe equazioni cubiche e quartiche in equazioni di secondo grado, dividendole per l'incognita o il suo quadrato. Nel*L'Algebra* di Bombelli si nota il salto di qualità con l'uso di un linguaggio simbolico adeguato. L'obiettivo dell'autore è arrivare ad una generalizzazione dei problemi che affronta: egli risolve il problema aritmetico proposto in forma analitica, poi formula una regola generale di soluzione prescindendo dai valori numerici e finalmente applica questa regola alla risoluzione di un'equazione analoga (con i coefficienti espressi in relazione ad una quantità indeterminata). Questo dimostra precisamente l'importanza che assume il linguaggio simbolico nei processi di generalizzazione.

Dall'analisi storica effettuata risulta che anche Fibonacci e l'autore del *Trattato d'Algibra*, utilizzando soltanto il linguaggio retorico, arrivano a formulare certe generalizzazioni, naturalmente di livello inferiore a quelle di Bombelli. Di conseguenza, nel processo di costruzione del linguaggio algebrico è possibile distinguere due livelli di concepire la generalità di un metodo: uno relativo alla possibilità di applicarlo in una diversità di casi specifici, e l'altro riguardante la possibilità di esprimerlo attraverso il linguaggio dell'algebra simbolica (Cfr. Colin e Rojano, pp. 158).

A questo punto sarebbe interessante considerare una fase sincopata più ampia, che comprenda non soltanto l'introduzione di abbreviazioni per le incognite, le sue potenze e certe relazioni di uso frequente, ma anche il primo livello di generalizzazione di un metodo. Il secondo livello di generalizzazione potrebbe appartenere sia alla fase sincopata, sia a quella simbolica dipendendo dal grado di sviluppo del linguaggio simbolico. Quindi anche se Leonardo e l'autore anonimo utilizzano il linguaggio naturale, l'inserire i problemi in classi di problemi (cioè l'essere algoritmisti) ci dà la possibilità di affermare che essi usino l'algebra sincopata. Secondo questa visione il pensiero algebrico comincia prima del simbolismo (Cfr. Arzarello *et al.*, pp. 10).

1.7 CONCLUSIONI

L'analisi storica sulla costruzione del linguaggio algebrico ha permesso di mettere in evidenza le principali concezioni, i procedimenti precursori, i passaggi da un concetto all'altro ed, in particolare, i passaggi attraverso i livelli linguistici delle diverse fasi retorica, sincopata e simbolica. Quindi da questo studio è possibile ricavare alcune considerazioni che risultano funzionali, sia alla comunicazione delle matematiche, sia alla ricerca in didattica. Le seguenti riflessioni si pongono come contributo effettivo che la storia può dare allo studio degli ostacoli epistemologici che incontrano gli alunni nelle situazioni di apprendimento del linguaggio algebrico:

- Lo sviluppo del linguaggio simbolico è molto lento: si passa da certi *nomi* per denotare l'incognita e certe relazioni, alle *abbreviazioni di queste parole*, ai *codici intermedi* fra linguaggio retorico e sincopato e infine ai *simboli*. In altre parole, queste abbreviazione e questi codici si depurano gradualmente fino all'elaborazione di un simbolismo algebrico corretto sintatticamente e più efficiente operativamente, in questo processo si osserva l'abbandono progressivo della lingua naturale come mediatore di espressione delle nozioni algebriche.

- Nella fase sincopata è necessario ricorrere ad altri linguaggi: naturale, aritmetico o geometrico, in mancanza di un linguaggio simbolico adeguato. Questi linguaggi —semanticamente più ricchi di quello algebrico— consentono di formulare le regole, di interpretare adeguatamente il problemi da risolvere, di ottenere la sua soluzione e di giustificare i passaggi effettuati algebricamente. Con l'elaborazione di un linguaggio algebrico più adeguato, i linguaggi di supporto si abbandonano gradualmente.

- I registri rappresentativi visuale sono presenti nei diversi procedimenti risolutivi che utilizzano il linguaggio geometrico, per esempio: in Euclide, al-Khowârizmî, al-Khayyam e nella geometri taglia-incolla; ma anche nel metodo aritmetico della doppia falsa posizione e in quello analitico di al-Tusi.

- Il concetto di uguaglianza varia in base ai procedimenti risolutivi adottati. Per esempio, essa indica il risultato di un'operazione aritmetica, ottenuto da sostituire un valore qualsiasi all'incognita; designa la equivalenza di figure piane (uguaglianza tra aree); rappresenta l'equivalenza tra due modi di esprimere la stessa quantità o indica "l'uguaglianza condizionata" tra due membri di un'equazione.

- Nella fase di transizione tra il pensiero aritmetico e il pensiero algebrico, certi ostacoli a livello aritmetico possono ritardare lo sviluppo del linguaggio algebrico e l'introduzione di nuove strategie e dei nuovi contenuti algebrici possono eclissare le conoscenze aritmetiche precedenti (Cfr. Malisani, 1990 e 1993).

- La necessità di introdurre nuovi oggetti di natura più astratta appare sempre con l'impossibilità di portare a termine il procedimento risolutivo di un problema particolare, cioè un processo computazionale.

- Nel processo di costruzione del linguaggio algebrico è possibile distinguere due livelli di concepire la generalità di un metodo: uno relativo alla possibilità di applicarlo ad una diversità di casi specifici, e l'altro riguardante la possibilità di esprimerlo attraverso il linguaggio dell'algebra simbolica.

Come Appendici si aggiungono due tabelle. Nella Tabella N° 1 si presenta uno schema riassuntivo sullo sviluppo storico del linguaggio algebrico sino al 500. Nella Tabella N° 2 si propone una classificazione delle fasi dell'evoluzione del linguaggio algebrico, più esaustiva di quella di Nesselmann, considerando non soltanto l'uso di un simbolismo adeguato, ma anche il grado di generalità del metodo applicato ed il livello di argomentazione delle regole utilizzate.

NOTE

1. I babilonesi usavano le parole *us* (lunghezza), *sag* (larghezza) e *asa* (area) come incognite. Le incognite non rappresentavano necessariamente queste quantità geometriche, ma probabilmente molti problemi algebrici erano nati da situazioni geometriche e la terminologia geometrica era diventata standard. I babilonesi a volte usavano dei simboli speciali per rappresentare le incognite i quali corrispondevano agli antichi simboli pittorici sumerici, non più in uso nel linguaggio corrente (Cfr. Kline, pag. 14).

2. Leonardo Pisano scrisse due opere di fondamentale importanza: il *Liber Abaci* (1202, revisionata nel 1228) e il *Liber Quadratorum* (1225). L' obiettivo del *Liber Abaci*, cioè il "libro dell'abaco", era introdurre in Europa il sistema di numerazione indo-arabico e i metodi di calcolo indiani. Questa opera fu utilizzata per lungo tempo ed esercitò un'enorme influenza sul popolo, perché presentava procedimenti aritmetici molto più semplici di quelli fondati sul sistema romano. Il *Liber Quadratorum*, cioè il "libro dei numeri quadrati", contiene importantissimi risultati sulla Teoria dei Numeri. Per tale motivo, alcuni autori (Bortolotti, 1950, pp. 650) ritengono che è "...l'opera che per l'originalità del metodo e l'importanza dei risultati *faceva di Leonardo* il più grande genio della teoria dei numeri, apparso nei quindici secoli trascorsi dal tempo di Diofanto a quello di Fermat". Ma, purtroppo questo libro purtroppo è rimasto sconosciuta durante più di sei secoli e così certi risultati di rilevanza hanno dovuto aspettare l'arrivo di Fermat.

3. Il *Trattato d'Algibra* fu scritto alla fine del XIV secolo da un'anonimo maestro fiorentino d'abaco. Rappresenta molto di più di un classico "trattato d'abaco", è un testo di algebra amplio e organico: perché non solo affronta tutti gli argomenti mercantili che caratterizzano questo tipo di opere, ma contiene anche un'intera sezione dedicata all'algebra. Essa rappresenta un importante contributo alla teoria di risoluzione di equazioni. Franci e Pancanti (pag. VI) ritengono che questa opera sia uno dei migliore trattati d'abaco medioevali e del Rinascimento che esse abbiano esaminato. In particolare segnalano che: "... i capitoli finali dedicati all'algebra ... sono fondamentali nella ricostruzione della storia di questa disciplina nei secoli dal XIII e XVI".

4. Gli egiziani scrivevano le frazioni di denominatore diverso da 1 e diverse da 2/3 come somme di frazioni unitarie (con denominatore uguale a 1). L'aritmetica egiziane era essenzialmente additiva, perché effettuavano le quattro operazioni utilizzando precisamente la scomposizione in frazioni unitarie. In questo modo, i calcoli diventavano complicati e laboriosi nella sua esecuzione. Un'analisi più approfondito sull'argomento si trova in Loria (pp. 41-47) e in Malisani (1996, pp. 27-28).

5. <u>Proposizione 28</u>: *Su una retta costruire un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, mancante di un parallelogrammo simile ad un parallelogrammo dato. Occorre che il poligono dato non sia maggiore del poligono costruito sulla metà della retta data, e simile al poligono mancante* (Euclide, pp. 146-147). Questo teorema è l'equivalente geometrico della soluzione dell'equazione di secondo grado: $ax - (b/c)\, x^2 = S$, dove a è la retta, S è l'area del poligono dato, b e c sono i lati del parallelogramma dato. La seconda parte: $S \leq a^2c/4b$ corrisponde alla limitazione necessaria perché le radici dell'equazione siano reali.
   <u>Proposizione 29</u>: *Su una data retta costruire un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, eccedente di un parallelogrammo simile ad un altro dato.* (Euclide, pp. 148)
   In termini algebrici, essa corrisponde all'equazione: $ax + (b/c)\, x^2 = S$ con a, b, c, e S numeri positivi dati. S non è soggetto ad alcuna limitazione (soltanto di essere positivo) perché l'equazione ammette sempre una soluzione reale.

6. Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî (c.780-c.850) compose un trattato di aritmetica intitolato: *Algorithmi de numero indorum*. Il vocabolo *"Algoritmo"* è venuto dall'alterazione dell'appellativo: *al-Khowârizmî* attribuito a Mohammed. Questo termine

dopo aver subito numerose variazioni, sia di significato sia di denominazione, fu utilizzato per esprimere una costante procedura di calcolo (Loria, pp. 336-337). Al-Khowârizmî scrisse anche un libro di algebra: *Al-jabr w'al muqâbala* ed, in questo titolo, indicò precisamente le due operazioni fondamentali della risoluzioni di equazioni di primo grado: la parola *al-jabr* significa "ristabilire", cioè ristabilire l'equilibrio tra i membri di un'equazione mediante il trasporto di termini e il vocabolo *al muqâbala* significa "semplificazione", cioè la riduzione dei termini simili. La parola *al-jabr* si trasformò in *algebrista* in Spagna, si convertì *algebrae* tradotta in latino ed, infine, fu abbreviata in *algebra* per indicare il nome della disciplina.

7. L'elenco dei 25 tipi di equazioni risolte nel Trattato d'Algibra è il seguente:

1- $ax = b$	9- $ax^3 = bx^2$	17- $ax^4 + bx^3 = c\,x^2$
2- $ax^2 = b$	10- $ax^3 + bx^2 = c\,x$	18- $ax^4 + cx^2 = b\,x^3$
3- $ax^2 = bx$	11- $ax^3 + cx = b\,x^2$	19- $ax^4 = bx^3 + c\,x^2$
4- $ax^2 + bx = c$	12- $ax^3 = bx^2 + cx$	20- $ax^4 + bx^2 = c$
5- $ax^2 + c = bx$	13- $ax^4 = b$	21- $ax^4 + c = b\,x^2$
6- $ax^2 = bx + c$	14- $ax^4 = bx$	22- $ax^4 = bx^2 + c$
7- $ax^3 = b$	15- $ax^4 = bx^2$	23- $ax^3 + bx^2 = c$
8- $ax^3 = bx$	16- $ax^4 = bx^3$	24- $ax^3 = bx^2 + c$
		25- $ax^3 + c = b\,x^2$

8. *L'Algebra* di Bombelli (scritta intorno al 1550 e pubblicata in parte nel 1572 e posteriormente nel 1579) rappresenta un'opera di gran importanza e si distingue da qualsiasi altro testo dell'epoca. E' composta da cinque libri, nei primi tre l'autore presenta in modo sistematico la teoria della risoluzione delle equazioni dei primi quattro gradi. Negli ultimi due (non pubblicati fino al 1929) realizza le dimostrazioni geometriche dei risultati ottenuti nei primi tre libri e la risoluzione di problemi geometrici mediante l'applicazione dell'algebra. E' interessante osservare che la disposizione e l'ordine degli argomenti trattati, i procedimenti costruttivi e dimostrativi eseguiti e il livello di linguaggio utilizzato rappresentano un notevole passo verso la costruzione dell'algebra simbolica.

9. Le *nozioni protomatematiche* sono quelle conoscenze che i matematici utilizzano senza chiamarle o definirle in termini matematici (implicite) (Cfr. Spagnolo, 1995, pp. 17).

10. Le equazioni del tipo $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ si risolvono applicando la seguente formula:

$$x = \pm \ {}^{3}\ \frac{q}{2} \quad \frac{q}{2}^{2} \quad \frac{p}{3}^{2} \quad {}^{3}\ \frac{q}{2} \quad \frac{q}{2}^{2} \quad \frac{p}{3}^{2} \ .$$

Precisamente quando $\frac{q}{2}^{2} \quad \frac{p}{3}^{2} < 0$ compare con la radice quadrata di un numero negativo, cioè un numero immaginario. Tuttavia quando le due radici cubiche che compongono la soluzione risultano numeri complessi coniugati, la soluzione diventa un numero reale.

11. Diofanto come Aristotele considera che il numero è composto da unità discrete. I numeri utilizzati nella su opera *Sui i numeri poligonali* per dimostrare le quattro proposizioni, in notazione moderna, sono: *Sn* il numero poligonale, *n* il lato del numero poligonale e *d* la differenza.

12. Gregory spiega la necessità di aggiungere alle cinque operazioni dell'algebra una sesta operazione (immaginabile): il passaggio al limite (Bourbaki, pp. 267-268).

ELSA MALISANI

BIBLIOGRAFIA

ABDELJAOUAD, M., 2003. Some elements in the history of Arab mathematics. Pubblicazione on-line su Internet nel sito http://dipmat.math.unipa.it/~grim/ - ISSN on-line 1592-4424.

ABDELJAOUAD, M., 2002. Proof in Arabian Algebra. *International Newsletter of the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* Hiver 2002.

BALLIEU, M, 1993. Les rapports entre l'algèbre et la géométrie dans l'oeuvre de 'Umar al-Khayyam et Sharaf ad-Din at-Tusi (cinq siècles avant Descartes et Newton). *Mathématique & Pédagogie, 91*, pp . 7 - 21.

BERZOLARI, E., 1950. *Enciclopedia della Matematica Elementare*, Vol. III, Parte 2. (Hoepli: Milano).

BOMBELLI, R., 1966. *L'Algebra*. Con l'introduzione di U. Forti e la prefazione e l'analisi di E. Bortolotti. (Feltrinelli: Milano).

BORTOLOTTI, E., 1950. Storia della Matematica Elementare. In L. Berzolari (ed.). Vol. III, Parte 2.

BORTOLOTTI, E., 1966. Prefazione e Analisi di *"L'Algebra"*. In Bombelli, pp. XXV - LIX.

BOURBAKI, N.,1976. *Elementos de historia de las matemáticas*. (Madrid : Alianza). (Ed. orig.: Eléments d'histoire des mathématiques. París: Hermann, 1969).

CHARBONNEAU L. & RADFORD L., 2002.Crafting an algebraic mind: intersection form history and the contemporary mathematics classroom. *Proceedings of 24th annual meeting the Canadian Mathematics Education Study Group (CMESG)*, Université du Québec à Montréal, pp. 47-60.

CIPOLLA, M., 2001. *Storia della Matematica. Dai primordi a Leibniz.* A cura di V. Pipitone. (Mazzara del Vallo: Istituto Euro Arabo di Studi Superiori). (Edizione originale pubblicata nel 1949, Mazzara:Società Editrice Siciliana).

COLIN, J. e ROJANO, T., 1991. Bombelli, la sincopación del álgebra y la resolución de ecuaciones. *L'educazione matematica, XII* (2), pp. 125 - 161.

EUCLIDE, 1930. *Gli Elementi* , Libri V - IX . Ed. da F. Enriques e collaboratori. (Zanichelli: Bologna).

FRANCI, R. e PANCANTI, M., 1988. Introduzione di "Il Trattato d'Algibra" Anonimo, pp . I - XXIX.

GAGATSIS, A., 1997. Problemi di interpretazione connessi con il concetto di funzione. *La Matematica e la sua Didattica*, 2, pp. 132 – 149.

GAGATSIS, A., 2000. Processi di traduzione ed il concetto di funzione. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 9, pp. 1 – 29.

GHEVERGHESE JOSEPH, G., 2000. *C'era una volta un numero*. (Milano: Saggiatore).

GLAESER, G., 1981. Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2-3.

GUILLEMOT, M., 1990-91. Entre arithmetique et algebre: les methodes de fausse position. Fascicule 5: *Didactique des Mathématiques*. (Rennes : Institut de Recherche Mathématique).

KLINE, M., 1991. *Storia del pensiero matematico*. (Torino: Einaudi). Vol. I.

LEONARD DE PISA, 1952. *Le livre des nombres carrés*. A cura e con l'introduzione di P. Ver Eecke. (Bruges : Desclée de Brouwer).

LIBRI, G. 1838-1841. *Histoire des sciences mathématiques en Italie*. Paris: Jules Renouard, Vol I. Op. cit. da Charbonneau & Radford, 2002.

LORIA, G., 1929. *Storia delle Matematiche*. Vol. I. (Torino: Sten).

MALISANI, E., 1992. Incidencia de distintos tipos de estructura lógica de un problema sobre la conducta de resolución. *Revista Irice*, n. 1, pp. 41-59. Pubblicazione on-line su Internet nel sito http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno3.htm - ISSN on-line 1592-4424.

MALISANI, E., 1993. Individuazione e classificazione di errori nella risoluzione di problemi algebrici e geometrici. Tesi di Laurea, Università degli Studi di Palermo.

MALISANI, E., 1996. Storia del pensiero algebrico fino al cinquecento. Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.)*, n. 6, Palermo, pp. 26-77. – Pubblicazione on-line su Internet nel sito http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm - ISSN on-line 1592-4424.

MALISANI, E., 1999. Los obstàculos epistemològicos en el desarrollo del pensamiento algebraico – Visiòn històrica. *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educaciòn*, n. 13, Rosario - Argentina, pp. 105-132. Pubblicazione on-line su Internet nel sito http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm - ISSN on-line 1592-4424.

MARINO, T. e SPAGNOLO, F., 1996. Gli ostacoli epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella Ricerca in Didattica della Matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B (2), pag.130 - 152.

NESSELMANN, G. H., 1843. *Essez der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhosain aus Amul.* Berlin: Arabisch und Deutsch. Op. cit. da Arzarello *et alii*, 1994.

PELLOS, F., 1492. *Compendion de l'abaco.* Testo curato secondo l'edizione di 1492 da Robet Lafont. Op. cit. da M. Guillemot, 1990-91.

RADFORD, L., 1996. The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks form a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran and L: Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht–Boston–London: Kluwer, pp. 39 – 53.

RAPISARDI, F., 1865. Uno sguardo agli algebristi italiani. *Giornale del Gabinetto Letterario dell'Accademia Gioenia, 4* (3), pag. 165 - 180. (Compilazione su Bollettino dell'Accademia Gioenia di scienze Naturali, 24 (338), pag. 41 - 56, 1991).

RASHED, R., 1984. *Entre Arithmétique et Algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. (Parìs: Les Belles Lettres).

SPAGNOLO, F., 1995. Obstacles Epistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe - Archimede. Tesi di Dottorato, Università di Bordeaux I. *Quaderni di Ricerca Didattica G.R.I.M., supplemento n. 5.* Pubblicata dall'Atelier National de Reproduction des Théses Microfiches (BP - 38040 Grenoble. Cedex 9 - Francia).

SPAGNOLO, F., 1998. Il ruolo della storia delle matematiche nella ricerca in didattica. *Storia e ricerca in didattica*. Pubblicazione on-line su Internet nel sito http://dipmat.math.unipa.it/~grim/storiadida.pdf

TRATTATO D'ALGIBRA, 1988. (Manoscritto anonimo del XIV secolo). A cura e con l'introduzione di R. Franci e M. Pancanti. Siena, *Quaderno del Centro Studi della Matematica Medioevale, 18.*

VER EECKE, P., 1959. Diophante d'Alexandrie. *Les six livres arithmétiques et le levre des nombres polygones*. Paris : Blanchard. Op. cit. da L. Radford, 1996.

ZAPELLONI, M. T., 1930. Commento sulle proposizioni 28-29 del Libro VI degli Elementi di Euclide. In Euclide, pag. 150 - 157.

TABELLA 1: SVILUPPO STORICO DEL LINGUAGGIO ALGEBRICO

RAPPRESEN-TANTI	CONOSCENZE ARITMETICHE	LINGUAGGIO NATURALE	LINGUAGGIO GEOMETRICO	SIMBOLISMO	LIVELLO DI GENERALIZ-ZAZIONE	TIPI DI EQUAZIONI	METODI DI RISOLUZIONE
BABILONESI (≈2000 a.C.)	Sistema posizionale di basi 60 e 10. Numeri interi, alcune frazioni.	Principale supporto di espressione.	Supporto per la formulazione di alcuni problemi	-----	Risoluzione di singoli problemi.	Quadratiche Biquadratiche	Completamento del quadrato.
EGIZIANI (≈1700 a.C.)	Sistema non posizionale di base 10. Numeri interi, alcune frazioni.	Principale supporto di espressione.	Supporto per la formulazione di alcuni problemi	-----	Risoluzione di singoli problemi.	Lineari. Quadratiche della forma $ax^2 = b$	Regola della falsa posizione
EUCLIDE(≈300 a.C.)	Sistema non posizionale di base 10. Numeri razionali e irrazionali quadratici positivi.	Supporto di espressione.	Supporto procedurale di argomentazione con strumenti euclidei.	-----	Risoluzione di singoli problemi.	Lineari. Quadratiche	Costruzione geometrica
DIOFANTO (≈250 d.C.)	Sistema non posizionale di base 10. Numeri razionali e irrazionali quadratici positivi.	Supporto procedurale	-----	Introduzione di abbreviazioni per l'incognita e le sue potenze.	Risoluzione di singoli problemi.	Lineari, quadratiche e cubiche determinate e indeterminate.	Aritmetici
CINESI (Sec.III a.C.- Sec. III d.C.)	Numeri razionali positivi. Alcuni irrazionali.	Supporto di espressione.	Supporto per la formulazione di alcuni problemi.	-----	Risoluzione di singoli problemi.	Primo e secondo grado.	Regola della doppia falsa posizione.
INDIANI (≈500 - ≈1200)	Sistema posizionale di base 10. Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi.	Supporto procedurale.	Supporto per la formulazione di alcuni problemi.	Introduzione di abbreviazioni per l'incognita e le sue potenze ed alcune relazioni.	Risoluzione di singoli problemi.	Lineari e quadratiche determinate e indeterminate. Alcune equazioni di grado superiore al secondo.	Aritmetici (regola della semplici falsa posizione)

RAPPRESEN-TANTI	CONOSCENZE ARITMETICHE	LINGUAGGIO NATURALE	LINGUAGGIO GEOMETRICO	SIMBOLISMO	LIVELLO DI GENERALIZ-ZAZIONE	TIPI DI EQUAZIONI	METODI DI RISOLUZIONE
ARABI (≈800 - ≈1300)	Sistema posizionale di base 10. Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi (non accettati come coefficienti e radici di equazioni).	Supporto di espressione.	Supporto procedurale e di argomentazione con strumenti euclidei.	Introduzione di nomi speciali per l'incognita e le sue potenze.	Tendenza alla risoluzione di classi di problemi.	Lineari Quadratiche Cubiche	Regola della falsa posizione. Formula risolutiva. Geometrici (analitici)
LEONARDO PISANO (≈1170 - ≈1250)	Sistema posizionale di base 10. Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi (non accettati come coefficienti e radici di equazioni).	Supporto di espressione.	Supporto procedurale e di argomentazione con strumenti euclidei.	Introduzione di nomi speciali per l'incognita e le sue potenze.	Risoluzione di classi di problemi.	Lineari Quadratiche	Aritmetici (Regola della falsa posizione). Geometrici
IL TRATTATO D'ALGIBRA (Anonimo del XIV sec.)	Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi (non accettati come coefficienti e radici di equazioni).	Supporto di espressione e procedurale.	-----	Introduzione di nomi speciali per l'incognita e le sue potenze.	Risoluzione di classi di problemi.	Lineari Quadratiche Sistemi Alcune equazioni di terzo e quarto grado.	Formali[1] Regola della falsa posizione
ALGEBRISTI DEL 500 (anteriori a Bombelli)	Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi (non accettati come coefficienti e radici di equazioni).	Supporto procedurale.	Supporto procedurale di argomentazione con strumenti euclidei.	Introduzione di abbreviazioni per l'incognita, le sue potenze ed alcune relazioni.	Risoluzione di classi di problemi.	Equazioni dei primi quattro gradi.	Formali

[1] Per **metodi formali** di risoluzione si intende: il trasporto di termini da un membro all'altro o l'applicazione della stessa operazione ad entrambi i membri per le equazioni di primo grado; la formula risolutiva per le equazioni quadratiche e quelle cubiche incomplete; il procedimento di trasformazione ad un'equazione di secondo grado per quelle quartiche.

RAPPRESEN-TANTI	CONOSCENZE ARITMETICHE	LINGUAGGIO NATURALE	LINGUAGGIO GEOMETRICO	SIMBOLISMO	LIVELLO DI GENERALIZ-ZAZIONE	TIPI DI EQUAZIONI	METODI DI RISOLUZIO-NE
BOMBELLI (≈1526 - ≈1572)	Numeri razionali e irrazionali quadratici. Numeri negativi. Irrazionalità cubiche. Numeri immaginari.	Supporto per completare la comunicazione.	Supporto procedurale di argomentazione con strumenti euclidei e algebrici.	Introduzione di una notazione particolare per l'incognita, le sue potenze ed le relazioni di uso frequente.	Risoluzione di classi di proble-mi espressi mediante formule.	Equazioni dei primi quattro gradi.	Formali
VIETE (≈1540 - ≈1603)	Numeri reali e complessi	-----	Supporto procedurale di argomentazione con strumenti euclidei e algebrici.	Introduzione di simboli per l'incognita, le sue potenze, i coefficienti generici ed le relazioni di uso frequente.	Risoluzione di classi di proble-mi espressi mediante formule.	Equazioni dei primi quattro gradi.	Formali

TABELLA 2: FASI DELL'EVOLUZIONE DEL LINGUAGGIO ALGEBRICO

FASI	LINGUAGGIO NATURALE	GEOMETRIA	ARITMETICA	ESEMPI
ALGEBRA RETORICA 1	Si	* Argomentazione con strumenti pre-euclidei. * Risoluzione di un problema per volta.	Linguaggio di supporto procedurale.	Babilonesi, Egiziani, Cinesi
ALGEBRA RETORICA 2	Si	* Argomentazione completa con strumenti euclidei. * Risoluzione di un problema per volta.		Greci classici: Euclide
ALGEBRA SINCOPATA 1	Si	Risoluzione di un problema per volta.	Introduzione di abbreviazioni per l'incognita e le sue potenze.	Diofanto Indiani
ALGEBRA SINCOPATA 2	Si	Risoluzione di classi di problemi.	Introduzione di nomi o di abbreviazioni per l'incognita e le sue potenze.	*Trattato d'Algibra* (anonimo del XIV secolo). Arabi[1]
ALGEBRA SINCOPATA 3	Si	* Argomentazione completa con strumenti euclidei. * Risoluzione di classi di problemi.	Introduzione di nomi o di abbreviazioni per l'incognita, le sue potenze ed alcune relazioni.	Fibonacci[2] Algebristi del 500
ALGEBRA SINCOPATA 4	Si	* Argomentazione completa con strumenti euclidei e algebrici. * Risoluzione di classi di problemi espressi mediante formule.	Introduzione di una notazione particolare per l'incognita, le sue potenze e le relazioni di uso più frequente.	Bombelli
ALGEBRA SIMBOLICA[3]	No	* Argomentazione completa con strumenti euclidei e algebrici. * Risoluzione di classi di problemi espressi mediante formule.	Introduzione di simboli per l'incognita, le sue potenze, i coefficienti generici e le relazioni di uso più frequente.	Viète

[1] Utilizzano soltanto alcuni nomi per chiamare l'incognita e le sue potenze, ma argomentano con strumenti euclidei.
[2] Utilizza soltanto alcuni nomi per nominare l'incognita nella parte finale del *Liber Quadratorum*.
[3] Viene presentata l'algebra simbolica senza altri livelli in quanto il presente lavoro si ferma storicamente proprio con l'introduzione del simbolo.