Gruppi. trasformazioni, simmetrie
Un percorso all'algebra astratta alla fisica

(parte terza)

3. SIMMETRIE

3.1 PREMESSA

Richard Feynman, uno fra i più grandi fisici teorici del secolo scorso, premio nobel nel 1965 per lo sviluppo dell'elettrodinamica quantistica (teoria di capitale importanza, estensione e completamento della teoria elettromagnetica classica nel dominio dei fenomeni microscopici), amava suonare il tamburo *bongo*. Nello splendido libro "La legge fisica" (che raccoglie una serie di conferenze tenute ad un pubblico di non specialisti) il brillante fisico statunitense introduce così il suo discorso: *"E' strano, ma nelle rare occasioni in cui mi hanno invitato a suonare in pubblico il tamburo, il presentatore non ha mai creduto necessario ricordare che mi occupo* ***anche*** [!!!] *di fisica teorica.* ***Forse perché rispettiamo più le arti delle scienze.*** *Gli artisti del Rinascimento dicevano che l'interesse principale dell'uomo deve essere l'uomo: tuttavia ci sono altre cose interessanti al mondo, e perfino gli artisti apprezzano i tramonti, le onde dell'oceano e il cammino delle stelle attraverso i cieli. [...] Quando guardiamo la natura, traiamo un piacere estetico dall'osservazione diretta. Tra i fenomeni della natura c'è però anche* ***una struttura, un ritmo*** *che non appare direttamente all'occhio, ma che si rivela solo dopo una più attenta analisi; e sono appunto questi ritmi e strutture che chiamiamo* ***leggi fisiche****."*

Nelle prime due parti di questo lavoro si è parlato dell'importanza delle strutture algebriche astratte, in particolare della struttura di "gruppo", e della loro connessione con la geometria, che deve essere correttamente intesa come studio delle figure di uno spazio aventi carattere invariante rispetto a un gruppo di trasformazioni. In questa parte conclusiva si cercherà di spiegare in che senso anche una legge fisica si possa considerare una "struttura": il **legame fra leggi fisiche e strutture gruppali** è infatti molto profondo ed è stato (e continuerà ad essere) particolarmente fecondo per la ricerca in fisica. Naturalmente sarebbe necessario possedere notevoli competenze specialistiche per comprenderlo appieno, ma si può comunque tentare di intuirlo.

Occorre infine puntualizzare che la connessione così stretta fra fisica e algebra astratta è relativamente recente: *"Nelle fisica moderna i metodi algebrici – e in particolare la teoria dei gruppi – hanno acquistato un interesse sconosciuto alla fisica del secolo scorso. [...] La fisica 'classica' del XVIII o XIX secolo ha avuto come suo massimo obiettivo quello della costruzione di modelli meccanici spazio-temporali; in tale spirito lo strumento matematico ben doveva essere l'analisi classica, col suo bagaglio di equazioni differenziali, atte a descrivere la fondamentale continuità e località dei processi fisici. [...] La fisica del XX secolo porta invece l'impronta della relatività e della meccanica quantistica; e perciò da un lato si ha la ricerca dell'invarianza sotto insiemi di trasformazioni; dall'altro l'indagine sugli aspetti di una teoria che risultino indipendenti da riferimenti, descrizioni, modelli particolari: cioè sugli aspetti strutturali nel senso della matematica moderna"* (E. Fabri).

3.2 IL TERMINE "SIMMETRIA"

Esistono due accezioni nell'uso comune del termine "simmetria". La prima è un'accezione ampia e si collega alla nozione antica di simmetria, come "armonia" e "proporzione". Tale nozione risale ai greci, viene fatta propria dai latini (Vitruvio: *"la simmetria è l'accordo armonico fra le parti di un'opera e la rispondenza di proporzioni fra le singole parti e l'intera figura"*) e domina soprattutto nelle arti figurative. Nella seconda accezione il termine "simmetria" ha un significato più circoscritto (simmetria è la relazione d'uguaglianza tra elementi opposti di una figura) e si collega alla moderna nozione di simmetria. Da tale concetto è possibile sviluppare in senso matematico la nozione di simmetria: parti uguali si possono "scambiare" fra loro mediante trasformazioni geometriche.

"La simmetria ha acquistato una posizione del tutto centrale nella descrizione, spiegazione e previsione dei fenomeni naturali. Dalla fisica microscopica alla cosmologia, dalla chimica alla biologia, la ricerca scientifica ricorre sempre di più a considerazioni, principi e metodi basati su proprietà di simmetria. [...] ***La simmetria è*** *applicata nella scienza contemporanea nel senso ben preciso di* ***invarianza rispetto ad***

un gruppo di trasformazioni" (E. Castellani). Il termine "simmetria" ha quindi assunto un significato tecnico astratto. Proprio tale nozione "gruppale" di simmetria è diventata predominante nella scienza contemporanea: *"Ovunque ci sia simmetria c'è un gruppo"* (M. Gardner). Inoltre l'invarianza rispetto a gruppi di trasformazioni non è solitamente riferita ad oggetti materiali, bensì ad oggetti astratti quali sono le relazioni matematiche fra grandezze fisiche (le leggi fisiche).

3.3 IL RUOLO DELLE SIMMETRIE

Perché risulta così utile applicare le simmetrie nell'indagare i fenomeni naturali? Le funzioni delle simmetrie sono diverse.

1) La più semplice è forse quella di **classificare** o **definire** oggetti in base alle loro proprietà di simmetria. Abbiamo già visto, ad esempio, che la struttura di un motivo geometrico risulta governata dai gruppi cristallografici: tali gruppi consentono una completa classificazione morfologica a priori dei cristalli.
2) E' possibile **spiegare** molti fenomeni naturali come conseguenze della presenza di simmetrie. Ad esempio, Archimede, per formulare il principio della leva, osservò che due pesi uguali posti sui due piatti di una bilancia a bracci uguali devono farsi equilibrio, in quanto l'intera configurazione è simmetrica rispetto al piano mediano della bilancia.
3) La struttura dei gruppi di trasformazioni, riconducibile a un preciso reticolo di sottogruppi, consente di **unificare** teorie differenti nel contesto di un'unica teoria: su tale funzione unificatrice si basa, ad esempio, il programma di unificazione delle forze della natura.
4) La struttura gruppale, applicata alle equazioni di una teoria, può costituire un **vincolo** relativo all'espressione formale di un'equazione. Il fatto che sia nota la forma di un'equazione costituisce un notevole vantaggio: al ricercatore rimane il compito (in realtà comunque piuttosto arduo) di determinare i parametri, variabili o costanti, che compaiono nell'equazione.
5) Infine è possibile **prevedere**, in base a considerazioni di simmetria, il verificarsi di certi fenomeni o l'evoluzione di determinate situazioni fisiche.

A quest'ultimo proposito occorre ricordare che la simmetria ha condotto addirittura alla scoperta dell'esistenza di nuovi oggetti fisici o di inusitati aspetti della realtà.

Nel 1961 **Murray Gell-Mann** (premio nobel nel 1969) propose alcuni diagrammi reticolari esagonali per ordinare simmetricamente numerose particelle (adroni con differenti valori di spin, carica e stranezza). Il fatto di avere trovato che l'esagono che raggruppava gli adroni a spin 3/2 fosse costituito da dieci particelle, di cui solo nove note, lo portò a fare una previsione assolutamente precisa: *"Deve esistere un barione con spin 3/2, carica –1, stranezza –3 e un'energia a riposo intorno a 1680 MeV. Se andrete a cercare questa particella omega meno, come propongo di chiamarla, sono certo che la troverete."* Ben presto una squadra di fisici accettò la sfida e confermò sperimentalmente l'esistenza della particella *W* -. Inoltre la simmetria di questi reticoli esagonali suggerì a Gell-Mann la ragionevole possibilità che queste particelle fossero particelle composite, dotate di una comune struttura interna realizzata mediante sub-particelle effettivamente elementari, alle quali diede il nome di **quark** (una curiosità: il termine "quark" è privo di uno specifico significato, in quanto è tratto dall'opera più ermetica di James Joice, il romanzo *La veglia di Finnegan*).
Si possono fare altri esempi, storicamente rilevanti, dell'uso "euristico" della simmetria.

Nella sua tesi di laurea (1924) il fisico **Louis de Broglie** ipotizzò, in maniera molto azzardata, che le particelle potessero manifestare un comportamento ondulatorio. Formulò tale ipotesi sulla base di una presunta simmetria della natura, poiché era nota da alcuni anni l'esistenza di un aspetto corpuscolare della radiazione elettromagnetica. Nella convinzione che la natura fosse intrinsecamente simmetrica giunse alla seguente conclusione: se le onde elettromagnetiche possono comportarsi da corpuscoli (ad esempio nell'effetto fotoelettrico), allora anche le particelle materiali possono comportarsi come le onde e dovrebbero mostrare in opportune circostanze fenomeni di diffrazione. L'ipotesi di de Broglie, molto originale ed in evidente contrasto con il senso comune, ricevette pochi anni dopo una conferma sperimentale: i fisici **Davisson** e **Germer**, facendo interagire un fascio di elettroni sufficientemente veloci con un cristallo di nichel, ottennero delle tipiche figure di diffrazione, del tutto simili alle figure di diffrazione dei raggi X. Il contributo di de Broglie risultò fondamentale per lo sviluppo della fisica moderna, poiché costituì il punto di partenza per la costruzione della meccanica quantistica.

Un ultimo esempio: è noto che tutto l'elettromagnetismo risulta potenzialmente contenuto nelle quattro famose "equazioni di Maxwell". Nonostante portino il suo nome, il fisico inglese **James Clerk Maxwell** non ne scoprì nessuna: Maxwell riuscì a capire che le quattro equazioni costituivano un sistema coerente e, convinto che dovessero avere una struttura simmetrica, fu in grado di correggere una delle equazioni, che mancava di un termine di particolare rilevanza.

3.4 LA SIMMETRIA NELLA LEGGE FISICA

"E' facile comprendere come un oggetto possa essere simmetrico, ma come può una legge fisica avere una simmetria?" (R. Feynman).

Un intero capitolo de "La legge fisica" di Feynman è la risposta a questa domanda. E' certamente il caso di seguire sinteticamente le parole dello stesso Feynman, che risultano chiare e precise, rimandando al testo completo per una ricca serie di possibili puntualizzazioni.

Le leggi della fisica sono simmetriche nel senso che "ci sono delle cose che possiamo fare ad esse, o al nostro modo di rappresentarle, che non producono nessuna differenza e che lasciano tutto invariato nei suoi effetti".

Il primo esempio di simmetria è la **traslazione nello spazio**: " se fate un qualunque esperimento con certi oggetti e poi andate a costruire lo stesso apparecchio per fare lo stesso esperimento, con oggetti simili, [...] semplicemente traslati da un punto all'altro nello spazio, allora nell'esperimento traslato accadranno le stesse cose che accadevano nell'esperimento originario.[...] Prendiamo come esempio la legge della gravitazione, che dice che la forza fra i corpi varia in maniera inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. [...] Il fatto che la legge dica 'la distanza tra i due oggetti' anziché la distanza assoluta dall'occhio centrale dell'universo, significa che le leggi si possono traslare nello spazio."

Una seconda simmetria è la **traslazione nel tempo**: "Cominciamo a far girare un pianeta intorno al sole in una certa direzione; se potessimo farlo ricominciare due ore o due anni dopo, ma con il sole e il pianeta esattamente nello stesso modo, allora tutto andrebbe esattamente come prima, perché anche qui la legge parla della velocità, ma mai del tempo assoluto da cui bisogna cominciare a misurare le cose".

Un terzo esempio di simmetria è la **rotazione nello spazio attorno a un punto fisso**: "Se faccio degli esperimenti con un'apparecchiatura costruita in un punto, e poi ne prendo un'altra esattamente uguale, ma girata in modo che tutti gli assi siano in una direzione diversa, essa funzionerà nello stesso modo."

Dal punto di vista matematico, queste trasformazioni geometriche dello spazio-tempo (cioè di uno spazio a quattro dimensioni, tre spaziali e una temporale) si traducono in equazioni, che contengono le coordinate di un punto valutate in due sistemi di riferimento (quello originario e quello trasformato), equazioni in cui tali coordinate sono mescolate fra loro: "Le leggi della natura devono essere scritte in modo tale che, se si fa questa mescolanza e si risostituisce nelle equazioni [che esprimono le leggi], queste ultime mantengano la stessa forma. Questo è il modo in cui la simmetria appare in forma matematica".

Un ultimo esempio: "Si pensa che le leggi fisiche non cambino quando ci si muove a velocità uniforme su una retta: questo si chiama **principio di relatività**". Feynman si sofferma su questo esempio "perché esso è realmente l'inizio dello studio delle simmetrie nelle leggi fisiche. Fu Poincaré a suggerire di analizzare quello che si può fare alle equazioni senza modificarle."

Naturalmente ci sono molte trasformazioni che non sono simmetrie delle leggi fisiche e che non ne lasciano quindi invariata la forma: ad esempio, il cambiamento di scala o la rotazione con velocità uniforme.

Infine esiste un altro importante aspetto delle simmetrie delle leggi fisiche, che verrà solo accennato: ad ogni simmetria corrisponde un principio di conservazione. La traslazione nello spazio è legata alla conservazione della quantità di moto, la traslazione del tempo alla conservazione dell'energia, la rotazione nello spazio alla conservazione del momento angolare.

3.5 LA ROTTURA DELLE SIMMETRIE

Se da una parte il concetto di simmetria aiuta a cogliere le analogie strutturali in fenomeni diversi, dall'altra è necessario introdurre un altro concetto che renda conto della molteplicità e non uniformità del reale: *"La simmetria è bella e apprezzabile in un contesto di non-simmetria"* (F. Strocchi).

Recentemente, sia nell'ambito della fisica sia in quello delle scienze naturali in generale, si tende a dare una notevole importanza allo studio delle **violazioni** o **rotture di simmetria**.

Una rottura di simmetria è riconducibile, in certi casi, a una simmetria meno generale. Quando si comprime un cilindro in rotazione attorno al suo asse con due forze perfettamente allineate con l'asse, il cilindro si flette formando ondulazioni circolari. Si perdono in tal caso molte simmetrie di traslazione: per sovrapporre il "cilindro con le ondulazioni" a se stesso occorre traslarlo lungo l'asse solo di una quantità ben definita, mentre nel caso del cilindro non ondulato qualunque traslazione è possibile. Questo fenomeno, per il quale sistemi inizialmente simmetrici che subiscono una perturbazione presentano comportamenti di minore simmetria, una volta raggiunta una nuova situazione di stabilità, è la rottura spontanea di simmetria ed è responsabile di molti processi di morfogenesi naturale. Consideriamo un esempio molto semplice. Il leone è uniformemente giallastro. Se per qualche motivo il processo di diffusione della pigmentazione è perturbato e diventa instabile, la simmetria si spezza e possono apparire delle strisce: in tal senso la tigre discende dal leone per rottura di simmetria. La simmetria può poi spezzarsi maggiormente con la scomposizione delle strisce in macchie esagonali e la tigre diventa così leopardo. Un altro esempio potrebbe essere la formazione delle galassie a spirale, in cui la simmetria circolare di un disco di materia si spezza nei bracci della spirale. Anche l'Universo stesso, che aveva una simmetria sferica subito dopo il Big Bang, comprende ora un'infinità di forme: forse è ancora sferico, ma ha perso la simmetria sferica.

Nel contesto della fisica moderna il concetto di "rottura di simmetria" è ben più complesso e tecnicamente definito. Si può comunque tentare di accennarlo con un esempio. **Enrico Fermi**, in un suo articolo del 1933, propose una teoria delle interazioni deboli sulla base di una stretta analogia con quelle elettromagnetiche e si chiese anche se questa analogia fosse in qualche modo riportabile a una specifica simmetria fra le due interazioni. Tale simmetria non poteva però rendere conto della notevole diversità dei fenomeni a cui le due interazioni danno luogo. La soluzione del problema che si pose Fermi arrivò nel 1967, con la teoria di **Weinberg-Salam** (che valse loro il premio nobel). I due fisici collegarono le due interazioni mediante una relazione di simmetria e spiegarono le differenze fra i fenomeni elettromagnetici e quelli deboli ipotizzando una non-simmetria dell'ambiente in cui le interazioni hanno luogo. In tal senso, anche se lo spazio vuoto ci sembra naturalmente simmetrico e omogeneo, in realtà non è così: alla determinata simmetria X che esiste fra le interazioni deboli e quelle elettromagnetiche corrisponde una violazione della simmetria X da parte del vuoto, nel quale tale interazioni hanno luogo. Analoghe rotture di simmetria sono alla base dello studio di fenomeni molto significativi, come quello della superfluidità (l'elio liquido a bassissime temperature è privo di viscosità) e quello della superconduttività (un metallo superconduttore conduce corrente senza resistenza).

In alcuni casi la rottura di simmetria conduce a simmetrie parziali, che ammettono eccezioni, e si giunge così a definire un nuovo concetto, quello di **quasi-simmetria**.

Come spiega sempre Feynman, fra le simmetrie che inizialmente sembravano caratterizzare le leggi fisiche c'era quella della **riflessione spaziale**.

Se costruiamo due orologi che siano l'uno l'immagine speculare dell'altro, li carichiamo e li lasciamo andare, pensiamo corretto prevedere un comportamento perfettamente simmetrico dei due orologi. E questo risulta effettivamente vero se il funzionamento degli orologi è basato sulle leggi della gravità e dell'elettromagnetismo (lo sarebbe anche se il funzionamento degli orologi coinvolgesse le leggi che governano le reazioni nucleari). Eppure questa presunta simmetria delle leggi fisiche rispetto alla destra e alla sinistra non è confermata quando si vanno ad analizzare molti processi biologici (che dovrebbero in qualche modo essere riconducibili alle leggi fisiche). L'immagine speculare di una vite destrorsa (che si avvita in senso orario) è una vite sinistrorsa (che si avvita in senso antiorario). In natura esistono strutture elicoidali destrorse e, se valesse una simmetria fra destra e sinistra, dovrebbero esistere in uguale percentuale le corrispondenti strutture sinistrorse. Invece le proteine e il DNA si avvolgono formando eliche prevalentemente destrorse, al contrario degli amminoacidi che le costituiscono che sono esclusivamente sinistrorsi. **Louis Pasteur**, per primo, comprese che la chimica degli organismi viventi è *chirale* (ovvero mostra preferenze per la destra o per la sinistra): *"La vita quale ci si manifesta è funzione dell'asimmetria dell'universo e delle conseguenze di questo fatto"*. Anche le particelle elementari che ruotano su se stesse e si muovono lungo l'asse di rotazione possono essere levogire o destrogire e, per esempio, pare che in tutto l'universo esistano soltanto neutrini destrorsi (e antineutrini sinistrorsi).

Questi fatti, assieme ad alcune evidenze nel campo specifico della fisica (fenomeni anomali in fisica delle particelle, relativi ai decadimenti nei quali risulta coinvolta l'interazione debole), misero seriamente in dubbio la "simmetria delle leggi fisiche rispetto alla riflessione spaziale", chiamata in gergo tecnico "**simmetria di parità P**". La teoria sviluppata dai fisici **Lee** e **Yang** (premi nobel nel 1957), basata sulla violazione della parità, rappresentò il crollo di un pregiudizio piuttosto diffuso presso la comunità scientifica e una battuta del fisico Wolfgang Pauli ne sottolinea il contenuto "eretico": *"Dio ha creato il mondo come se fosse mancino!"*.

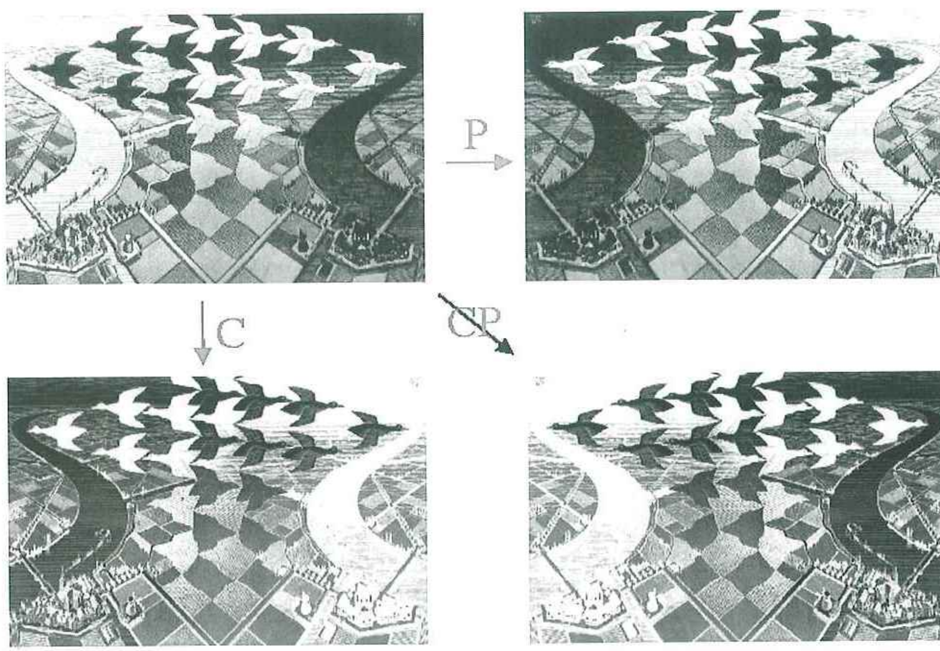
Successivamente a questi fatti pareva che una certa simmetria delle leggi fisiche potesse venire recuperata se la parità P veniva associata alla simmetria che prevede la possibilità di scambiare ogni particella con la sua antiparticella, simmetria detta "**coniugazione di carica C**". La simmetria di parità P venne quindi generalizzata nella **simmetria CP**, che sembrava valere senza eccezioni: si era convinti che, per ottenere l'invarianza delle leggi fisiche, nelle immagini speculari degli eventi fisici occorresse anche scambiare le particelle con le antiparticelle. Invece nel 1964 un esperimento condotto dai fisici **Fitch** e **Cronin** (primi nobel nel 1980) rivelò la violazione della simmetria CP in alcuni decadimenti che coinvolgono i kaoni (particelle a spin zero, appartenenti alla classe degli adroni). Attualmente c'è un'evidenza teorica e sperimentale relativa alla **simmetria TCP**, che prevede di completare una trasformazione CP con un'inversione temporale: nelle immagini speculari dei fenomeni occorre, oltre che scambiare le particelle con le rispettive antiparticelle, guardare gli eventi come in un film che procede all'indietro. Fino ad ora, le nostre conoscenze ci consentono quindi di affermare che la simmetria di parità P e quella combinata CP si configurano come quasi-simmetrie (al 99% la natura è simmetrica in questo senso), mentre la simmetria TCP risulta avere una validità generale.

3.6 CONCLUSIONE

Da quanto sopra esposto si dovrebbe intuire quanto sia importante il concetto di simmetria (accanto a quello di rottura di simmetria) nel progresso del sapere scientifico.

A questo punto rimane aperto un problema interpretativo, che va lasciato ad una riflessione da sviluppare in ambito epistemologico: *"Le varie ed importanti funzioni delle simmetrie nella scienza portano in modo naturale a chiederci per qual motivo la simmetria possa occupare un posto così centrale nella nostra descrizione della natura. Le simmetrie fanno veramente parte della natura o rappresentano solo efficaci strumenti concettuali attraverso i quali ci orientiamo nello studio del mondo fisico?"* (E. Castellani).

Paola Zucca



BIBLIOGRAFIA

R. Feynman, *"La legge fisica"*, Bollati Boringhieri.

E. Fabri, Corso di Perfezionamento *"Teoria dei Gruppi e Principi d'Invarianza"*, Università di Pisa (reperibile all'indirizzo ftp://osiris.df.unipi.it/pub/sagredo nella directory "gruppi").

Quaderno "Le Scienze" n.118, *"Simmetria e realtà"*, a cura di E. Castellani.

E. Castellani, *"Simmetria e natura. Dalle armonie delle figure alle invarianze delle leggi"*, Laterza.

M. Golubitsky – I. Stewart, *"Terribili simmetrie: Dio è un geometra?"*, Bollati Boringhieri.

H. Weyl, *"La simmetria"*, Feltrinelli.

F. Strocchi, *"Simmetrie e rottura di simmetrie in Fisica"*, Scuola Normale Superiore, Pisa (reperibile all'indirizzo http://www.crm.sns.it/miscellanea/articoli/strocchi/simm02.ps)

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *"Fondamenti di fisica"*, Zanichelli.

Il genere Surrepsia

Il genere *Surrepsia* fa parte della famiglia delle *Amarillidaceae* ma, contrariamente agli altri generi della famiglia, presenta il perigonio variamente conformato. Ha, infatti, il perigonio sì formato da tre più tre tepali, ma essi invece di essere simili tra loro come in tutti gli altri generi della famiglia, ha distintamente il giro fiorale esterno molto diverso da quello interno.

Anche le foglie parallelinervie, invece di essere tutte uguali, presentano nelle varie specie colorazioni più variegate.

Il bulbo presenta invece tipicamente le radici fascicolate, molto lunghe (è un carattere molto importante per la coltivazione del genere), ma la colorazione cambia con la specie e costituisce carattere diagnostico.

Il genere *Surrepsia* fu individuato dal De Candolle che proprio per i caratteri del perigonio, con attente osservazioni microscopiche, riuscì a distinguerlo dal genere *Sanseveria* e dal genere *Saintpaulia*: il genere *Surrepsia*, malgrado abbia le foglie molto simili (nella specie *ovopasqualis* DC) a quelle della comune *Sanseveria*, se ne distingue per la forma del giro fiorale interno, finemente sfrangiato e di colore rosato come nei fiori della *Saintpaulia tomentosa* L. La questione è che la *Surrepsia hoax* è tossica per semplice sfioramento delle foglie.

Il genere *Surrepsia* ha tre specie note, tutte di origine tropicale, ma comunemente usate come piante d'appartamento e due specie ancora da attribuire, poiché i caratteri sono intermedi fra i generi *Sanseveria*, *Saintpaulia* e *Surrepsia*.

Surrepsia ovopasqualis DC ha il giro interno di tepali sfrangiato e rosato, mentre quello esterno è di colore più violaceo e sfumato. Sei stami con antere prolungate e lesiniformi. Foglie lanceolate, con *abicintio* simile alle foglie del gen. *Sanseveria* ma il cui margine può presentare (nella *ssp sanleo*) verticilli colorati in rosso o magenta. Viene utilizzata come pianta d'appartamento ma non deve mai essere esposta alla luce diretta, poiché nei margini possono accrescersi protuberanze nelle var. *henthusia* (Mill.) e *grecanthia* (Mill.) che, per semplice inalazione, possono provocare *asmae ileociecalis* (*Ann. Med. 1980 e segg, Realis Medicinorum* of British Association of London Council at

Greenwitch Laborurs Resourches for dangerous effects of *gen.* Surrepsia at home) nonché *simphytum aleorectalis* qualora l'esposizione alla luce superi il limite delle brevidiurne.

Surrepsia catena DC *antoniussantus* Nt. ha il giro interno costituito da tepali di un colore più sfumato del prec. e meno sfrangiato. Sei stami sessili di colore violaceo con punta di rosso cardinale alternato. Foglie parallelinervie, di aspetto simile al *gen.* precedente, ma il cui margine risulta intero. Il bulbo radicale è di colore aranciato, con lunghe radici fascicolate violacee.

Secondo *Delassonne* è sconsigliabile toccare le foglie, poiché liberano un diestere dimetilico, che, in condizioni naturali, svolge la funzione di impollinazione chemiotrofa (vedasi nota n. 115 in *Ann. Med. 1980 e segg, Realis Medicinorum* of British Association of London Council at Greenwitch Laborurs Resourches for dangerous effects of *gen.* Surrepsia at home) ed, in contempo, l'uso dei fiori prima della estivazione (in forma di impacco, direttamente sulla parte) può essere utile nei casi di stipsi, qualora la luce superi il limite delle longidiurne.

Non risultano comunque effetti secondari legati all'assunzione, per via orale, di suffumigi di semi di *Surrepsia catena* a scopo diuretico.

Surrepsia hoax DC è similmente pari alla *Sanseveria longifolia*, pianta comune in ambiente domestico, per le eleganti foglie lanceolate, a margine intero, screziate in modo trasversale, dalle spighe giallastre che nella *ssp. bufalinas* Mill. diventano leggermente verdastre, sintomo della presenza di HCl, che rende la pianta, se non ben identificata, fonte di lento avvelenamento.

Il perigonio è costituito da tepali più o meno simili tra loro: caratteristica è l'unghia alla base del primo giro fiorale che presenta sfumature che vanno dal giallo carico (*Surrepsia hoax* DC *xantocyania* CV*)* al verde rossastro (*Surrepsia hoax* DC *viridellis* CV*)*. Tale carattere è diagnostico per differenziare la *Surrepsia hoax* dalla *Sanseveria longifolia.*

Infatti, la *Surrepsia hoax*, per semplice contatto, provoca ustioni di primo grado, soprattutto sui polpastrelli e nel palmo delle mani, ma importante è il contatto con l'albero respiratorio, in cui provoca una patologia simile alla *ephistropheitis periesophagea*, che può essere tuttavia scambiata, anche conoscendone l'eziologia, con la *astragalosintetis* e, nei casi più dubbi, con la irritazione cronica del mesenterio.

Mentre per le specie suddescritte, la letteratura medica riporta analitiche descrizioni sintomatiche ed eziologiche, per le due specie ancora non ben individuate si tratta di ipotesi, più che altro proposte nel *Realis Medicinorum* of British Association of London Council at Greenwitch Laborurs Resourches dai dott. Black e White.

La specie *Surrepsia x Saintpaulia* comune nelle abitazioni ha perigonio formato da 3 più 2 tepali rosati, foglie cuoriformi verde profondo: si differenzia dalla comune *Saintpaulia* per il bulbo verdastro mentre la violetta africana ha radici a fittone.

Surrepsia x Saintpaulia può provocare nausea, vomito, diarrea e febbre di tipo *fascioliformis* per semplice contatto e pertanto, per vederne le radici, deve essere spiantata munendosi di guanti spessi poiché l'agente infettante si infiltra facilmente attraverso guanti sottili. Come antidoto, si consiglia di lavare la parte infettata con $K(HCO_3)$ e sciacquare molto approfonditamente, prima dell'insorgere dei sintomi più manifesti. Nel caso in cui i sintomi diventino importanti, consultare il medico di base.

La specie *Surrepsia x Sanseveria*, anch'essa comune nelle abitazioni, ha spighe giallastre che fioriscono due volte l'anno. Le eleganti foglie parallelinervie, screziate, sono molto simili a quelle della *Sanseveria*, da cui differisce per il bulbo bluastro.

Secondo il dott. White, *Surrepsia x Sanseveria* può provocare estesi eritemi per semplice ontatto, con formazione di epidermide a *planariosis*.

Come antidoto vengono consigliati abbondanti impacchi di $Ca(ClO_4)_3$ e lunghi semicupi di H_2O_2. Il dott.Black consiglia comunque di rivolgersi al medico di base (*ibidem*).

Chiave di lettura

Chi ha frequentazione di Internet, avrà compreso la chiave di lettura: per gli altri, chi scrive invita a non farsi raggirare dalle informazioni oblique che possono apparire sulla rete.

GIUSEPPE STINCO

Il secondo principio della termodimamica

SERA DI FEBBRAIO

Spunta la luna.
Nel viale è ancora
giorno, una sera che rapida cala.
Indifferente gioventu s'allaccia,
sbanda a povere mete.
ed è il pensiero
della morte che, infine, aiuta a vivere.

INTRODUZIONE

La Termodinamica, come scienza, inizia con l'analisi da parte del giovane ingegnere francese Sadi Carnot, del problema di come costruire dispositivi capaci di convertire calore in lavoro migliori e più efficienti, affinché la costruzione di tali macchine termiche non rimanesse un tentativo artigianale e talvolta fortunoso e potesse così svilupparsi una teoria sul funzionamento delle stesse.
Questa branca della Fisica è uno dei pochi casi a tutt'oggi in cui l'ingegneria ha dato un notevole contributo allo sviluppo della teoria.
La Termodinamica nasce dunque subito dopo la Rivoluzione Industriale di fine '700 (quella della macchina a vapore di James Watt) e si sviluppa lungo tutto l' '800 per completarsi col 1900, data in cui aiuta la Fisica in una svolta fondamentale (la teoria dei quanti di Planck, poi sviluppata da Einstein ed altri, nasce appunto da un "cavillo" che la Termodinamica non riusciva a spiegare).
In essa possiamo individuare quattro principi generali, che, per ironia della sorte o semplice casualità, vengono chiamati Principio Zero, Primo, Secondo e Terzo (il numero d'ordine non dipende dall'ordine temporale in cui sono stati scoperti e neanche dalla loro importanza).
Noi qui ci occuperemo del cosiddetto Secondo Principio.
Esso, dopo quasi duecento anni dalla scoperta, dà tuttora problemi di accettazione e di adattamento e non soltanto agli studenti. È il principio dell'impossibilità a poter fare qualcosa e ciò lo rende ostico a tutti, chi più, chi meno. Storicamente, esso è stato scoperto prima del cosiddetto Primo Principio, ma ci sono voluti decenni affinché la comunità scientifica lo prendesse seriamente in considerazione.
Ma a cosa è dovuta questa difficoltà?
A differenza del Primo Principio, equivalente al Principio di Conservazione dell'Energia (tanto caro ai Fisici), che è il principio delle possibilità e della potenza umana, il Secondo Principio ci impone di riconoscere la limitatezza della nostra natura. Non esiste alcun processo naturale o artificiale che sia, che non debba sottostare al Secondo Principio: essenzialmente esso vieta il ritorno indietro nel tempo e l'utilizzo senza sprechi delle fonti energetiche e in pratica vieta l'impossibile.
Se consideriamo il periodo storico e soprattutto filosofico in cui ci troviamo (come già detto, la Termodinamica nasce, si sviluppa e si completa attraverso tutto il XIX secolo, in paesi come

Francia, Germania e Inghilterra), non è difficile capire perché il Primo Principio esce trionfante dal confronto iniziale.

Ma come i cavalli di razza, che si dice vincano alla distanza, il Secondo Principio alla fine si attesta come forse il più importante tra i principi della Termodinamica, soprattutto per il cittadino comune. Perché in tutta la nostra vita è quello contro cui combattiamo di più e purtroppo perdiamo sempre e siamo destinati a perdere per sempre.

LA FRECCIA DEL TEMPO

Quando una trasformazione bilancia esattamente il conto dell'energia in ingresso e dell'energia in uscita, il Primo Principio è soddisfatto. Ma da esso non riusciamo a capire se la trasformazione è possibile in pratica o solo possibile in teoria; in esso niente ci dà l'idea di quale sia il verso spontaneo dell'evoluzione del sistema.

Nella realtà di tutti i giorni, ci accorgiamo però che non tutte le trasformazioni sono possibili: esiste la cosiddetta *freccia del tempo* e nella quasi totalità dei fenomeni, non c'è la possibilità di "tornare indietro", se non a spese di qualcos'altro (in genere in termini di energia).

Guardando il filmato di un bocciolo di rosa che man mano si schiude, si apre completamente e poi sfiorisce, ci possiamo rendere conto che se il filmato fosse visto in *reverse* (ossia dalla sfioritura fino a tornare al bocciolo) qualcosa non andrebbe per il verso giusto.

I processi possibili possono essere catalogati in diverse tipologie, a seconda delle sostanze coinvolte e dal tipo di scambi energetici che si instaurano, abbiamo così processi meccanici, termici, chimici, biologici, ecc...Ognuno di essi implica una trasformazione energetica. In base al Primo Principio, il totale delle energie calcolato all'inizio del processo deve risultare uguale al totale delle energie calcolato alla fine dello stesso processo. Sempre secondo tale principio, sarebbe possibile ritornare al punto di partenza, senza nessun'altra modifica nei parametri che intervengono, semplicemente invertendo il senso del processo.

In realtà tutti i fenomeni macroscopici naturali sono irreversibili, ossia il "tornare indietro" non è spontaneamente possibile: l'evoluzione spontanea di un processo segue una "freccia del tempo".

Analizziamo ad esempio l'evoluzione di un fenomeno che incontriamo ogni giorno: la nostra colazione.

> Quanti di noi la mattina fanno colazione col caffelatte e quindi sanno come prepararlo? Si prende una tazza di latte e la si riscalda, si prende una tazzina di caffè e si versa questo nel latte. A questo punto, l'evoluzione più o meno spontanea (in genere la miscela viene girata col cucchiaino) è che il caffè e il latte si mescolano ed otteniamo una miscela omogenea, in cui le "particelle" bianche del latte non sono

distinguibili dalle "particelle" nere del caffè, ma abbiamo solo una soluzione di un bel nocciola più o meno scuro. Che probabilità abbiamo che spontaneamente ci ritroviamo ad un certo punto una parte della tazza con solo latte e l'altra parte solo caffè? Anche se la mescolanza delle due bevande è avvenuta a causa del cucchiaino con cui ho girato per omogeneizzare, che probabilità ho, che, girando nell'altro verso, le due bevande si separino?

Per coloro che fanno colazione solo col latte o il tè o semplicemente un caffè, consideriamo lo scioglimento dello zucchero nella bevanda calda. Inizialmente avremo la tazza con la sola bevanda calda e ad essa aggiungiamo i cristalli di zucchero, che (mescolando o no) si scioglieranno. Nel frattempo, la bevanda si raffredda un po'. Quanto dobbiamo aspettare affinché lo zucchero torni in cristalli e la nostra bevanda si riscaldi, senza alcun intervento esterno?

L'esempio vi avrà fatto sorridere, ma in base al Primo Principio ciò sarebbe possibile, perché nessuno dei due fenomeni di ritorno lo violerebbe. Ma sembra ovvio che le risposte in ambedue i casi siano per una impossibilità dell'accadere del fenomeno.

Il Secondo Principio regola anche questo, perché rende conto della *freccia del tempo* e si occupa dell'evoluzione spontanea dei sistemi fisici.

Il fenomeno spontaneo (talmente familiare da sembrare troppo ovvio per potervi costruire su una teoria) che a metà dell' '800 portò ad uno degli enunciati con cui il Secondo Principio è noto, è il raggiungimento dell'equilibrio termico fra due oggetti inizialmente a temperature differenti. È noto che ponendo a contatto i due oggetti, di cui uno a temperatura più alta dell'altro, ed aspettando un certo intervallo di tempo, si avrà un livellamento delle due temperature, ossia il corpo più caldo si raffredderà e il corpo più freddo si riscalderà, fino a raggiungere la cosiddetta temperatura di equilibrio. Il fenomeno inverso non è mai stato osservato: due oggetti che si trovano inizialmente alla stessa temperatura, dopo un certo intervallo di tempo, si dovrebbero trovare, senza nessun intervento esterno, a temperature differenti, per cui uno si dovrebbe spontaneamente riscaldare, l'altro raffreddare.

L'enunciato a cui ci riferivamo è quello del fisico tedesco (ma nato in Polonia) Rudolph Clausius che nel 1850 lo enunciò così: "*è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di far passare calore da un corpo freddo ad uno caldo*".

Attenzione: la locuzione "unico risultato" è il nocciolo della questione – significa "senza spesa di energia" o senza altre modifiche al sistema e quindi equivale a dire *spontaneamente*. Non vuole assolutamente dire che una trasformazione del genere è sempre impossibile: infatti i frigoriferi funzionano proprio estraendo calore da corpi freddi (interno del frigo) e cedendolo a corpi più caldi (esterno del frigo), ma per far ciò hanno bisogno di consumare energia (per esempio elettrica).

IL CONTRIBUTO DELLA TECNOLOGIA

Storicamente l'enunciato di Clausius del Secondo Principio è di circa 25 anni successivo a quello ottenuto dalle riflessioni di Carnot di cui si parlava nell'introduzione.

Come già accennato, si intende per macchina termica un dispositivo che possa convertire calore in lavoro (un esempio per tutti: allora, la macchina a vapore; oggi, il motore a scoppio). Tutte le macchine termiche lavorano su cicli termodinamici, in maniera tale da avere il sistema ogni volta alle condizioni iniziali e poter ricominciare da capo.

A questo punto, è necessario adottare un linguaggio più specifico e puntuale, rispetto a quanto fatto fin qui. Intanto definiamo propriamente cosa si intende per *sistema*: in questo contesto il sistema è una zona delimitata da un contorno, al cui interno si trova ciò che è sotto il nostro esame (ad esempio l'acqua bollente che si converte in vapore nella macchina a vapore, oppure la miscela di aria e benzina dei motori a scoppio); tutto ciò che è esterno al contorno che delimita il sistema è detto *ambiente esterno*, o semplicemente ambiente (tornando ai nostri esempi, nel primo caso, la caldaia, i pistoni, le turbine; nel secondo caso, ancora i pistoni e poi le valvole, i cilindri, il radiatore, ecc...). In generale, sistema e ambiente interagiscono, attraverso scambi di calore e/o lavoro. Insieme formano il cosiddetto *universo termodinamico* (l'Universo è il caso più ampio di universo termodinamico).

Dobbiamo anche inserire alcune equazioni indispensabili, prima fra tutte quella derivante dal Primo Principio, ossia

$$\Delta U = Q - L$$

in cui ΔU rappresenta la variazione di energia interna del sistema sottoposto ad una qualunque trasformazione, e dove per energia interna si intende la somma di tutte le forme di energia microscopiche possibili (cinetica, sia traslazionale che rotazionale, potenziale, chimica, nucleare, ecc...),Q è la quantità di calore scambiata con l'ambiente, mentre L è il lavoro compiuto dal sistema sull'ambiente esterno. Importante sottolineare che mentre la variazione di energia interna dipende soltanto dagli stati iniziale e finale del sistema, calore e lavoro dipendono anche dalla trasformazione effettuata.

In base al Primo Principio, la variazione di energia interna del sistema sottoposto ad un ciclo sarà nulla (in quanto stato iniziale e stato finale del sistema coincidono), così il calore complessivamente scambiato tra sistema ed ambiente sarà convertito in lavoro prodotto dal sistema e quindi utilizzabile.

IN UN CICLO $\Delta U = 0 \rightarrow \quad Q_{TOT} = L_{TOT}$ (1)

Per ottenere un ciclo, bisogna compiere più trasformazioni consecutive, in ognuna di esse avremo in genere uno scambio di calore tra sistema ed ambiente, cioè il sistema può assorbire o cedere calore; la somma algebrica dei calori scambiati darà il calore complessivamente scambiato durante il ciclo.

$$Q_{TOT} = Q_{ASS} - Q_{CED} \qquad (2)$$

Stessa cosa vale per il lavoro: per ognuna delle trasformazioni, il sistema potrà produrre del lavoro o potrà subire una compressione e quindi subire un lavoro dall'esterno, il lavoro prodotto durante il ciclo sarà ancora la somma algebrica dei vari lavori.
Una grandezza fisica che viene utilizzata per comprendere quanto è efficiente un dispositivo (non necessariamente termico) è il rendimento, definito come la quantità di energia utile prodotta per unità di energia assorbita. Nel caso specifico della macchine termiche si ha come energia utile il lavoro prodotto e come energia assorbita il calore assorbito dall'ambiente.

$$\eta = L_{TOT} / Q_{ASS} \qquad (3)$$

Progettisti, costruttori e utenti desidererebbero che il rendimento raggiungesse il 100%, ossia che tutta l'energia assorbita venisse convertita in energia utile. Il Primo Principio non vieta tale eventualità: basterebbe che il calore ceduto all'ambiente esterno fosse ridotto a zero. Infatti, sostituendo le relazioni (1) e (2) nella (3) ed operando semplici passaggi algebrici otteniamo

$$\eta = 1 - Q_{CED} / Q_{ASS}$$

Nel 1824, il giovane Carnot si rese per primo conto dell'impossibilità di ottenere un rendimento del 100% e si arrivò così alla formulazione del Secondo Principio basato sul funzionamento delle macchine termiche, più noto nella sua successiva enunciazione da parte di Lord Kelvin: "*è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di convertire completamente in lavoro il calore prelevato da un serbatoio termico*".
La parola chiave di questo enunciato è *completamente*, cioè è possibile solo la conversione parziale in lavoro, il resto rimane calore e viene ceduto all'ambiente, a temperatura diversa (minore). Un

enunciato equivalente a quest'ultimo potrebbe essere "è impossibile che il rendimento di un dispositivo sia del 100%".
Esiste una netta asimmetria tra il processo di conversione di calore in lavoro, rispetto al processo inverso, ovvero la conversione di lavoro in calore: infatti, quest'ultimo può raggiungere un'efficienza del 100% attraverso un procedimento assolutamente reale e facilmente realizzabile.
Prendendo due oggetti ruvidi e sfregandoli fra loro, otterremo un riscaldamento delle superfici a contatto: quindi il lavoro fatto da noi si è completamente convertito in calore. Non solo: se i due oggetti sono immersi in una grande bacinella d'acqua, il calore prodotto sarà trasferito all'acqua, ma se la massa dell'acqua è sufficientemente grande, essa non subirà nessuna variazione apprezzabile di temperatura. Così si realizza un processo che converte completamente lavoro in calore senza modificare alcun altro parametro.
Un altro caso in cui si può facilmente convertire energia utile in calore è il processo attraverso il quale funzionano gli scaldabagno elettrici: l'energia elettrica viene completamente convertita in calore che viene utilizzato per riscaldare l'acqua in cui è immerso il dispositivo elettrico (se esso fosse immerso in una grande vasca d'acqua si continuerebbe ad avere la conversione da energia elettrica a calore, senza riuscire effettivamente a riscaldare l'acqua della grande vasca).

IL PARADOSSO DELLA MORTE TERMICA

Gli enunciati di Clausius e di Kelvin, sebbene fondati su evidenze di tipo diverso, si equivalgono, ma si rimanda ai testi in bibliografia per l'eventuale approfondimento.
Unendo le considerazioni derivanti dai due enunciati, abbiamo da un canto l'evoluzione spontanea degli eventi naturali, dall'altro la degradazione dell'energia disponibile in calore (meno utilizzabile o utilizzabile solo in parte). In qualche maniera il Secondo Principio unifica l'asimmetria temporale con l'asimmetria tra calore e lavoro.
Riconsiderando l'Universo come universo termodinamico, l'evoluzione di esso implica che alla fine non avremo più energia utilizzabile, in quanto prelevando calore da serbatoi ad alta temperatura e riversando parte di questo calore in serbatoi a temperatura minore, si arriverà alla fine ad un livellamento termico, ossia tutto l'Universo si troverà ad un'unica temperatura. Questo è ciò che viene chiamata Morte Termica: arrivati a questo punto infatti avremo un solo serbatoio e non avremo quindi più la possibilità di sfruttare il calore estratto per produrre lavoro (anzi, non sarà più possibile neanche estrarre calore).
Unica consolazione per noi mortali, è che la Morte Termica dell'Universo arriverà comunque dopo che tutta l'energia disponibile in forma utile verrà trasformata ed in questo computo dobbiamo annoverare in primo luogo, per quel che ci riguarda direttamente, l'energia solare. Ma visto che la

Morte Termica dell'Universo arriverà sicuramente dopo la fine della nostra Stella Madre, a quel punto della vita sulla Terra non sarà rimasto nulla, tutti gli esseri viventi saranno estinti ed anche la specie umana.

LA VISIONE OTTIMISTICA MODERNA

La Termodinamica Classica porta, come abbiamo visto, alla congettura della Morte Termica dell'Universo, ma essa non tiene in considerazione l'espansione dell'Universo (e non ne avrebbe potuto tenere conto, visto che questo nasce come una delle previsioni conseguenti la Teoria della Relatività Generale). Risolvendo infatti le equazioni della Relatività Generale e giungendo alla dimostrazione dell'espansione dell'Universo, la congettura della Morte Termica diventa un paradosso e come tale si scioglie come neve al Sole.

Si può provare infatti che in un Universo in espansione, la temperatura delle diverse particelle che lo costituiscono non può mai diventare uguale.

Accenniamo a tale dimostrazione, considerando per semplicità l'Universo costituito da soli due tipi di particelle, ossia fotoni e barioni (questi ultimi, principalmente neutroni e protoni); ciò non inficerà i nostri risultati, in quanto esse rappresentano in larga misura le specie maggiormente diffuse.

La densità di energia, ossia l'energia per unità di volume, per i fotoni, è data da $u_r = c^2\rho_r$, e vale l'equazione di stato $P_r = \frac{1}{3} u_r$

Per i barioni invece valgono le relazioni

$$u_m = c^2\rho_m$$

$$u_m = nmc^2 + \frac{3}{2}\, n\, k_B T$$

$$P_m = n\, k_B\, T$$

In cui ρ_r è la densità dei fotoni, ρ_m è la densità dei barioni; u_r e u_m sono rispettivamente la densità di energia per i fotoni e per i barioni, c è la velocità della luce, m è la massa media di un barione, k_B è la costante di Boltzmann, n è il numero di particelle per unità di volume, T è la temperatura assoluta.

Essendo l'espansione dell'Universo adiabatica, il I principio diventa, riscritto in forma differenziale,

$$dU = -\, P\, dV$$

così nel caso dei fotoni abbiamo

$$d(R^3u_r) = -\, P_r dR^3 = -\frac{1}{3} u_r dR^3 \quad \rightarrow \quad R^3 du_r + u_r dR^3 = -\frac{1}{3} u_r dR^3 \quad \rightarrow \quad \frac{du_r}{u_r} = -\frac{4}{3}\,\frac{dR^3}{R^3}$$

e quindi, risolvendo l'equazione differenziale

$$u_r \approx R^{-4}$$

Dove il simbolo $\approx$ ha il significato di "proporzionale a" ed R è il raggio di una tipica regione dell'universo.

Ma, secondo la Termodinamica, tra u_r e T esiste la relazione

$$u_r \approx T^4$$

E quindi $T \approx R^{-1}$

Ciò significa che mentre l'Universo si espande, la temperatura dei fotoni diminuisce rispettando la legge di proporzionalità inversa.

Per i barioni, invece, il I principio della Termodinamica diventa

$$d(R^3nmc^2) + d(R^3\frac{3}{2}nk_BT) = - nk_BTdR^3$$

ma il primo termine è nullo in quanto rappresenta la variazione di una quantità costante, essendo n inversamente proporzionale a R^3. Allora l'equazione precedente si riduce a

$$\frac{3}{2}\frac{dT}{T} = -\frac{dR^3}{R^3}$$

da cui si ottiene

$$T \approx R^{-2}$$

Cioè mentre l'Universo si espande, la temperatura dei barioni diminuisce con una proporzionalità quadratica inversa.

Pertanto, T (fotoni) > T (barioni)

Ciò dimostra che la predetta" Morte Termica " non ci sarà, in quanto avremo sempre e comunque particelle a temperatura diversa, che ci possono garantire l'esistenza dei due serbatoi a temperatura differente necessari per il funzionamento delle macchine termiche.

LOREDANA DI STEFANO

P. S. Si ringrazia il Prof. A. Gentile, per i consigli e gli utili suggerimenti relativi alla questione del paradosso della morte termica e della sua soluzione.

Bibliografia:

M. Zemansky: Termodinamica Zanichelli ?

R. Feynman, R. Leighton, M. Sands: La fisica di Feynman, Zanichelli 2001

P. Atkins: il secondo principio, ed. Zanichelli Bologna 1988

M. Guillen: Le cinque equazioni che hanno cambiato il mondo, ed. Longanesi, 1997

P. Davies: I misteri del tempo ed. A. Mondatori 1996

A. B. Arons: Guida all'insegnamento della Fisica, ed. Zanichelli Bologna

G. Terraboni: "Il contributo del vapore alla scienza e alla tecnica. Termodinamica e rivoluzione industriale" – Quaderni di Storia della Fisica Giornale di Fisica, n. 3, ed. Compositori Bologna 1998

P.Davies "la freccia del tempo" – Scienza nuova n.2, 1998

L.De Crescenzo: Il dubbio (cap.3 L'Entropia), ed. A. Mondatori

J. Walker: Fisica vol. 2, ed. Zanichelli Bologna, 2004

A. Caforio – A. Ferilli: Fisica vol. 2, ed. Le Monnier Firenze, 2004

OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Una nostra attenta lettrice la Prof.ssa Zucca, che vivamente ringraziamo, ci ha segnalato un errore nella precedente soluzione nel tema dato dal Ministero della Maturità 2004 nelle Americhe. Riproponiamo quindi all'attenzione degli allievi il compito, a relativo commento:

PROBLEMA 1

Tra i coni circolari retti inscritti in una sfera di raggio 10 *cm*, si determini:

1. il cono C di volume massimo e il valore, espresso in *litri*, di tale volume massimo.
2. il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale di C;
3. il raggio della sfera inscritta nel cono C e la percentuale del volume del cono che essa occupa.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x+a}{bx^2+cx+2} \qquad (1)$$

1. Si determinino i valori dei parametri che figurano nell'equazione (1) disponendo delle seguenti informazioni:
   a) i valori di a, b, c sono 0 o 1;
   b) il grafico G di f passa per (-1, 0);
   c) la retta y=1 è un asintoto di f.
2. Si disegni G.
3. Si calcoli l'area della regione finita di piano del primo quadrante degli assi cartesiani compresa tra l'asintoto orizzontale, il grafico G e le rette $x = 0$ e $x = 2$.

QUESTIONARIO

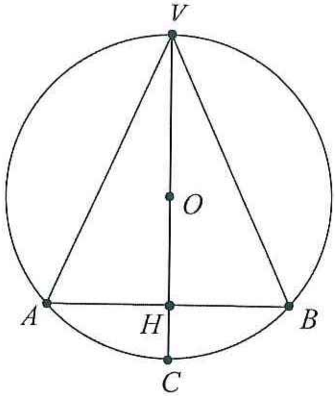
1. La coppia (1, 2) è la soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Quale può essere il sistema?
2. Sia α tale che la funzione $f(x) = \alpha x - \dfrac{x^3}{1+x^2}$ risulti crescente. Provare che $\alpha \geq \dfrac{9}{8}$.
3. Mostrare che le tangenti alla curva $y = \dfrac{\pi \operatorname{sen} x}{x}$ in $x = \pi$ e $x = -\pi$ si intersecano ad angolo retto.
4. Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 30% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 275 euro quale era il suo prezzo di listino?
5. Calcolare: $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$
6. Si dica quante sono le soluzioni reali dell'equazione $\dfrac{x}{10} = \operatorname{sen} x$ e si indichi per ciascuna di esse un intervallo numerico che la comprende.
7. Se tgα e tgβ sono radici di $x^2 - px + q = 0$ e *ctg*α e *ctg*β sono radici di $x^2 - rx + s = 0$, quanto vale il prodotto rs espresso in funzione di p e q?
8. Un professore interroga i suoi alunni a due per volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe è di 20 studenti.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili. Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONI

Problema 1.

1) Le sezioni della sfera e del cono con un piano passante per l'asse del cono sono rappresentate nella seguente figura:



Posto $VO = R = 10$ cm, $VH = x$ con $0 < x < 2R$ dal secondo teorema di Euclide discende che

$$AH = \sqrt{VH \cdot HC} = \sqrt{x(2R - x)}$$

e, pertanto, il volume del cono è dato da:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot VH = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2 \cdot (2R - x) = \frac{1}{6}\pi \cdot x \cdot x \cdot (2R - x)$$

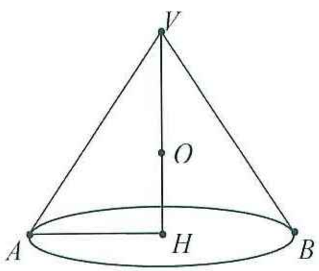
Dato che $x + x + 4R - x = 4R$ il volume risulta massimo se e solo se

$$x = 4R - x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}R = \frac{40}{3} \text{ cm}$$

e sostituendo tale valore nella funzione $V(x)$ si trova che:

$$V_{Max} = V\left(\frac{40}{3}\right) = \frac{32000}{81}\pi \text{ cm}^3 = \frac{32}{81}\pi \text{ dm}^3 = \frac{32}{81}\pi \text{ litri}$$

2) Sviluppando su un piano la superficie laterale del cono C :

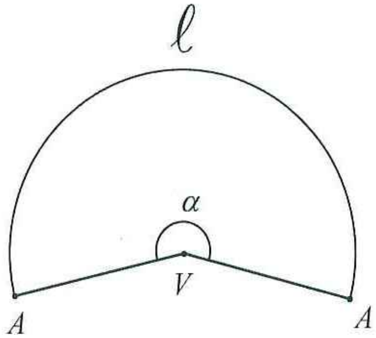


$$VH = \frac{40}{3}$$

$$AH = \sqrt{VH \cdot HC} = \sqrt{\frac{40}{3}\left(20 - \frac{40}{3}\right)} = \frac{20}{3}\sqrt{2}$$

$$VA = \sqrt{VH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{1600}{9} + \frac{800}{9}} = \frac{20}{3}\sqrt{6}$$

si ottiene il seguente settore circolare:

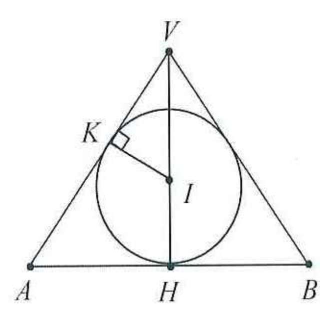


$$\ell = 2\pi \cdot HB = \frac{40}{3}\pi\sqrt{2}$$

La misura (in gradi) dell'angolo di apertura del cono è espressa da:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{\frac{40}{3}\pi\sqrt{2}}{\frac{20}{3}\sqrt{6}} \cdot \frac{180°}{\pi} = \left(120\sqrt{3}\right)° \approx 207°\ 50'\ 46''$$

3) Il centro I della sfera inscritta nel cono C coincide con l'incentro del triangolo ABV, pertanto:



$$IH = \frac{2[ABV]}{AB + VA + VB} = \frac{20}{3}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

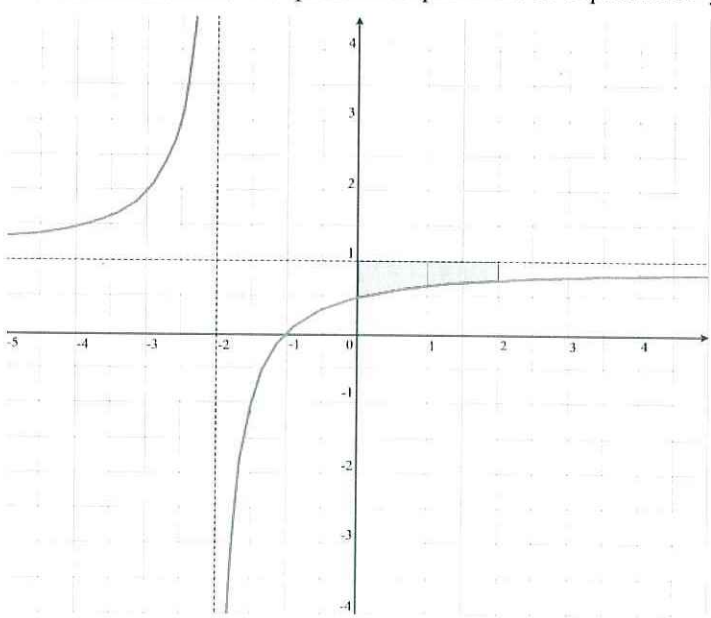
e, di conseguenza:

$$\frac{V(\text{sfera inscritta})}{V(\text{cono})}=\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot IH^3}{\frac{1}{3}\pi\cdot AH^2\cdot VH}=\frac{4\left[\frac{20}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^3}{\left(\frac{20}{3}\sqrt{2}\right)^2\frac{40}{3}}=6\sqrt{3}-10\approx 39,2\ \%$$

Problema 2.

1) Dalle tre condizioni assegnate discende subito $a=1,\ b=0,\ c=1$ e quindi $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

2) Il grafico della funzione è l'iperbole equilatera di equazione $y=\dfrac{x+1}{x+2}$



3) L'area della regione richiesta è data da:

$$S=\int_0^2\left(1-\frac{x+1}{x+2}\right)dx=\int_0^2\frac{1}{x+2}\,dx=\left[\log|x+2|\right]_0^2=\log 4-\log 2=\log 2$$

QUESTIONARIO.

1) Basta prendere due rette del fascio $y-2=m(x-1)$. Ad esempio scegliendo $m=1$, $m=-1$ si ottiene:

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=3 \end{cases}$$

2) Se $f(x)$ è crescente si ha $f'(x)\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, ossia:

$$\alpha-\frac{x^4+3x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\geq 0 \qquad , \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\alpha x^4+2\alpha x^2+\alpha-x^4-3x^2\geq 0 \qquad , \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$(\alpha-1)x^4+(2\alpha-3)x^2+\alpha\geq 0 \qquad , \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Affinché la precedente disuguaglianza sia verificata per ogni valore di x è necessario che :

$$\Delta=(2\alpha-3)^2-4\alpha(\alpha-1)\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\geq\frac{9}{8}$$

3) Dato che $f'(x)=\pi\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2}$ i coefficienti angolari delle tangenti alla curva nei punti di ascissa $x=\pm\pi$ sono:

$$m=f'(-\pi)=\frac{\pi^2}{\pi^2}=1 \quad , \quad m'=f'(\pi)=-\frac{\pi^2}{\pi^2}=-1$$

Dato che $m\cdot m'=-1$ le due rette sono perpendicolari.

4) Detto x il prezzo di listino abbiamo:

$$0,7\cdot x=275\Rightarrow x=\frac{2750}{7}=392,86 \text{ euro}$$

5) Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito:

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x + \int e^x D(\cos x) dx =$$
$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - I$$

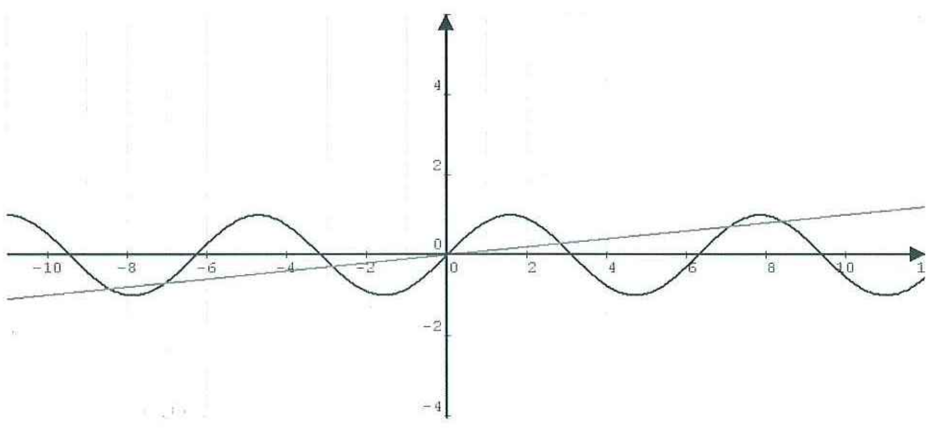
Dalla relazione precedente discende :

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + c$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale otteniamo:

$$\int_0^\pi e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left[e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)\right]_0^\pi = -\frac{1}{2} e^\pi - \frac{1}{2} = -\frac{e^\pi + 1}{2}$$

6) Notiamo che se x_0 è una soluzione lo è anche - x_0. Quindi basta trovare le soluzioni positive, raddoppiarle ed aggiungere le soluzione 0. Osserviamo che $|x| = 10|\operatorname{sen} x| \leq 10$ e, in quest'intervallo, vi è una soluzione in $[0, 2\pi]$ e due soluzioni in $[2\pi, 3\pi]$. In totale vi sono dunque $3 \cdot 2 + 1 = 7$ soluzioni, come si evince dal seguente grafico.



7) Dalle note relazioni sulla somma e il prodotto delle radici di un'equazione di secondo grado abbiamo:

$$\cot\alpha + \cot\beta = r \quad , \quad \cot\alpha + \cot\beta = s$$
$$\tan\alpha + \tan\beta = p \quad , \quad \tan\alpha + \tan\beta = q$$

Pertanto:

$$rs = (\cot\alpha + \cot\beta)(\cot\alpha \cot\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{(\tan\alpha \tan\beta)^2} = \frac{p}{q^2}$$

8) Le scelte sono tante quante le combinazioni semplici di 20 oggetti presi due alla volta, ossia:

$$\binom{20}{2} = 190$$

Antonino Gentile – Ercole Suppa