Teaching Mathematics and its Applications Advance Access published August 30, 2008

TEACHING MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS, 2008 1 of 2
doi:10.1093/teamat/hrn016

A short and elementary proof of the infinitude of primes

Aldo Scimone

Submitted June 2008; *accepted* July 2008

1. Introduction

Many important theorems have received through centuries several demonstrations, as if the mathematicians have wanted to reveal all the possible ways in order to get to the truth. As recently Sir Michael Atiyah remarked during an interview (1):

> Any good theorem should have several proofs, more the better. For two reasons: usually, different proofs have different strengths and weaknesses, and they generalize in different directions – they are not just repetitions of each other.

Some of these theorems represent the pillars of the mathematical knowledge, like the Pythagorean theorem or the one about the infinitude of prime numbers or the proposition on the irrationality of $\sqrt{2}$. For example, the Pythagorean proposition has received more than 360 proofs (2) of all sorts as algebraic, geometric, dynamic and so on. The irrationality of $\sqrt{2}$ is another famous example of a theorem which has been proved in many ways (3). Gauss himself had 10 different proofs for the *law of quadratic reciprocity*. The theorem about the infinitude of the prime numbers has fascinated generations of mathematicians since its first and famous demonstration given by Euclid (300 BC) into the seventh Book of the *Elements* (4), one of the mathematical masterpieces of all times. His demonstration is based on the theory of divisibility of composite numbers by prime factors, and it is a wonderful application of the so called *reductio ad absurdum*, i.e. it proceeds by contradiction. Other famous proofs of this theorem are the one by Euler and a topological proof by Furstenberg (5). But Euclid's proof remains the most fascinating because it is short and simple. It can be introduced into a scholastic curriculum for high school pupils too. Following the prints of Euclid, here is another short and elementary proof of the infinitude of prime numbers essentially based on the non-divisibility of a particular sum of numbers.

2. Proof

There are infinitely many prime numbers.

Let us suppose we have only three prime numbers:

$$p_1, p_2, p_3$$

Published by Oxford University Press on behalf of The Institute of Mathematics and its Applications 2008.

so, each natural number $T \neq p_k$ ($k = 1, 2, 3$) can be factorizated into primes:

$$T = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \cdot p_3^{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in N)$$

such that it is uniquely determined by the triple of exponents:

$$(\alpha, \beta, \gamma) \to T$$

In this manner, for any triple (α, β, γ) we get numbers divisible by p_1 or by p_2 or by p_3. Well, is there any triple $(\alpha', \beta', \gamma')$ characterizing the number $M = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3$?

If such a triple exists, one gets:

$$M = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 = p_1^{\alpha'} \cdot p_2^{\beta'} \cdot p_3^{\gamma'}$$

so M would be divisible by p_1 or by p_2 or by p_3. But this is impossible because in the expression of M there is not a common factor p_1 or p_2 or p_3.

So, there are two possibilities:

(i) M is a prime number other than p_1 or p_2 or p_3, and this way the theorem is proved;
(ii) M is a composite number, so it is divisible by a prime number other than p_1 or p_2 or p_3, and this way too the theorem is proved.

The method can be extended whether it is supposed that there are only n ($n \geq 3$) prime numbers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ and we consider the sum of all of the n products composed by $(n-1)$ of the prime numbers.

References

1. Raussen, M. and Skau, C. (2005) *Interview with Michael Atiyah and Isadore Singer*, Notices of the American Mathematical Society, Providence USA, p. 223.
2. Loomis, S. E. (1968) *The Pythagorean Proposition*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
3. Tikekar, V. G. (2007) *Seven Different Proofs of the irrationality of* $\sqrt{2}$. Bangalore: Resonance, Indian Academy of Sciences, pp. 31–39.
4. Heath, T. L. (1956) *The Thirteen Books of the Elements*, 2nd edn, Vol. 2, *Books III-IX*. New York: Dover.
5. Fürstenberg, H. (1955) On the infinitude of primes. *The American Mathematical Monthly*, **62**, 353.

Address for correspondence: Aldo Scimone, via C. Nigra 30 – 90141 Palermo (Sicily). Tel: +34 0486 7840. E-mail: aldo.scimone@libero.it

G. DITTA

Le frazioni generatrici dei numeri decimali periodici semplici e misti

La lezione è stata preparata per alunni di scuola secondaria di 2° grado.

1

Le frazioni generatrici dei numeri decimali periodici semplici e misti

Sappiamo tutti che la linea di frazione (orizzontale oppure obliqua) deriva da una deformazione dell'iniziale della parola latina "fractus" e che quindi equivale al simbolo operazionale di divisione (:).

Così la frazione $\frac{2}{5}$ indica il rapporto (il quoto, il quoziente) 2:5 e $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{6}$, indicano i rapporti 2:3 e 7:6.

Quando l'operazione di divisione viene eseguita il risultato dell'operazione prende il nome di valore della frazione.

Il processo di divisione fra numeratore e denominatore porta a un numero:

1) intero, nel caso in cui il numeratore è uguale, o multiplo del denominatore;
2) decimale finito;
3) decimale periodico.

Nel primo caso si parla di frazioni apparenti e il tipo non rientra nell'argomento che tratteremo; per esempio $\frac{20}{4} = 5$ perchè $4 \times 5 = 20$.

Nel secondo caso si parla di frazioni decimali, quindi di quelle frazioni che hanno per

2

denominatore una potenza di 10 (10, 100, 1000, ecc) oppure possono essere trasformate in frazioni decimali; per queste frazioni il processo di divisione fra numeratore e denominatore ha termine e quindi il valore della frazione è rappresentato da un numero decimale finito.

Anche questo tipo di frazione esula dall'argomento che ci siamo prefissi di trattare; vogliamo, però, far notare come si può individuare una siffatta frazione.

Partiamo dalla frazione ridotta ai minimi termini, indi trasformiamola (se non lo è) in frazione equivalente avente come denominatore una potenza di 10, ossia 10^n con n numero naturale.

Poichè $10^n = 2^n \cdot 5^n$, osserviamo che nel denominatore di una frazione decimale, o trasformabile in frazione decimale, figurano potenze di 2 oppure di 5 o di entrambi.

Il terzo tipo di frazione è quello nel quale il processo di divisione fra numeratore e denominatore non ha termine; poichè il resto di una divisione risulta sempre minore del divisore ne discende che tale resto può assumere diversi valori ma in

3

numero inferiore al divisore; nel continuare la divisione "all'infinito", quindi, il resto si riproduce, e, conseguentemente si riproduce un gruppo di cifre nel quoziente.

Il quoziente, pertanto, presenta una cifra, o, un gruppo di cifre che si ripetono "periodicamente"; per tale motivo il quoziente ottenuto si dice numero decimale periodico.

Prima di passare oltre presentiamo due esempi calcolando i valori delle frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$; eseguendo la divisione fra numeratore e denominatore di ciascuna frazione troviamo:

$\frac{2}{3} = 0,666....$
$\frac{5}{6} = 0,833.....$

dove i puntini significano che le cifre uguali si ripetono; in modo molto sintetico si può scrivere:

$\frac{2}{3} = 0,666.... = 0,\overline{6}$
$\frac{5}{6} = 0,833..... = 0,8\overline{3}$.

Nel valore della frazione $\frac{2}{3}$ notiamo che si ripete tutta la parte decimale che prende il nome di periodo, mentre ~~nel~~ il valore della frazione $\frac{5}{6}$ si ripete soltanto la cifra 3 che continua a essere chiamata periodo, ma non si

4

ripete la cifra 8 che prende il nome di antiperiodo.

Diremo che si può individuare il tipo di frazione senza dover eseguire la divisione fra numeratore e denominatore; partiamo da frazioni ridotte ai minimi termini, come $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{6}$, e analizzandone i denominatori osserviamo che:

$3 = 3$

$6 = 2 \cdot 3$

per cui deduciamo che se una frazione:

1) contiene a denominatore fattori diversi da due e cinque (come la frazione $\frac{2}{3}$), il suo valore è rappresentato da un numero decimale periodico semplice;

2) contiene a denominatore anche fattori due e cinque, il suo valore è rappresentato da un numero decimale periodico misto.

Un numero decimale periodico, per maggiore chiarezza, si dice semplice se il suo periodo è formato da tutta la sua parte decimale; si dice, invece, misto se il periodo non è costituito da tutta la parte decimale; il gruppo di cifre che segue la virgola e precede il periodo si dice antiperiodo.

5

Lo scopo della presente trattazione è quello di risalire alla frazione generatrice partendo da un numero decimale periodico, sia semplice che misto.

All'uopo consideriamo:

1) la frazione generatrice di un numero decimale periodico, con periodo diverso da nove, con parte intera nulla;

sia $0,\overline{31}$ un numero decimale periodico semplice e poniamo $g = 0,\overline{31}$ (a)

dato che la (a) è la forma sintetica del numero $0,\overline{31} = 0,313131......$ moltiplichiamo ambo i membri della (a) per 10^2, ove 2 rappresenta il numero delle cifre del periodo, e si ottiene

$$10^2 g = 10^2 \cdot 0,313131.... = 100 \cdot 0,3131... = 31,3131... =$$

$$= 31 + 0,3131... = 31 + g \quad \text{da cui}$$

$$10^2 g - g = 31$$

$$(10^2 - 1)\, g = 31 \quad \text{e infine}$$

$$g = \frac{31}{10^2 - 1} = \frac{31}{99}$$

Allora

La frazione generatrice di un numero decimale periodico ~~semplice~~ con parte intera nulla, ha per numeratore il periodo e per denominatore tanti nove quante sono

6

le cifre del periodo.

2) la frazione generatrice di un numero decimale periodico misto con parte intera nulla;
sia $0,2\overline{32} = 0,2323232\ldots$ un numero decimale periodico misto e poniamo

$$g = 0,2\overline{32} = 0,23232\ldots\ldots (6)$$

e moltiplichiamo i membri per 10^1 essendo 1 il numero delle cifre dell'antiperiodo; si ottiene:

$$10g = 2,323232\ldots = 2 + 0,3232\ldots =$$
$$= 2 + 0,\overline{32} \quad , \text{ma } 0,\overline{32} = \frac{32}{99}$$

quindi, sostituendo nella precedente uguaglianza, si ottiene:

$$10g = 2 + \frac{32}{99} = \frac{2\cdot 99 + 32}{99} = \frac{2\cdot(100-1)+32}{99} =$$
$$= \frac{200-2+32}{99} = \frac{232-2}{99} \quad \text{e infine}$$
$$g = \frac{232-2}{990}$$

Pertanto

La frazione generatrice del numero decimale periodico misto $0,2\overline{32}$ ha per numeratore la differenza fra tutto il numero formato dalle cifre del numero dato senza tener conto della virgola e l'antiperiodo; per denominatore tanti nove quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quan=

7

te sono le cifre dell'antiperiodo.

Così $0,2\overline{32} = \frac{232-2}{990} = \frac{230}{990} = \frac{23}{99}$

3) frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice con parte intera diversa da zero.

Sia $5,\overline{6}$ un numero decimale periodico semplice con parte intera diversa da zero; scrivo

$$g = 5 + 0,\overline{6} \quad \text{ma (vedi caso n.1)}$$
$$0,\overline{6} = \frac{6}{9} \quad \text{quindi, sostituendo,}$$
$$g = 5 + 0,\overline{6} = 5 + \frac{6}{9} = \frac{5 \cdot 9 + 6}{9} =$$
$$= \frac{5(10-1)+6}{9} = \frac{50+6-5}{9} = \frac{56-5}{9}$$

Allora

la frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice, con parte intera diversa da zero, ha per numeratore la differenza di tutto il numero senza tener conto della virgola e la parte intera; ha per denominatore tanti nove quante sono le cifre del periodo.

Quindi $g = \frac{56-5}{9} = \frac{51}{9} = \frac{17}{3}$

4) frazione generatrice di un numero decimale periodico misto con parte in=

8

tera diversa da zero.

Sia $35,2\overline{481}$ un numero decimale periodico misto con parte intera diversa da zero e pongo:

$$g = 35,2\overline{481};$$

moltiplico ambo i membri di detta uguaglianza per 10^1 dove 1 rappresenta il numero delle cifre di cui è costituito l'antiperiodo e ottengo

$$10g = 10 \cdot 35,2\overline{481} = 352,\overline{481} =$$

$= 352 + 0,\overline{481}$ ma $0,\overline{481} = \frac{481}{999} = \frac{481}{10^3-1}$

dunque

$$10g = 352 + 0,\overline{481} = 352 + \frac{481}{10^3-1} =$$

$$= \frac{(10^3-1) \cdot 352 + 481}{999} =$$

$$= \frac{352000 - 352 + 481}{999} = \frac{352481 - 352}{999}$$

e infine

$$g = \frac{352481 - 352}{9990}$$

pertanto

la frazione generatrice di un numero decimale periodico misto, con parte intera diversa da zero, ha per numeratore la differenza fra il numero dato, senza tener conto della virgola, e il numero formato dalle cifre che precedo=

9

no il periodo; ha per denominatore tanti nove quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Quanto dedotto da casi particolari può essere generalizzato

Sia $c_n c_{n-1} \ldots c_0, a_1 a_2 \ldots a_r \overline{p_1 p_2 \ldots p_s}$ un numero decimale periodico misto, ove $c_n c_{n-1} \ldots c_0$ rappresenta la parte intera, $a_1 a_2 \ldots a_r$ l'antiperiodo, e, $p_1 p_2 \ldots p_s$ il periodo (n, r, s numeri naturali); indichiamo con g detto numero e poniamo:

$$(1) \qquad g = c_n c_{n-1} \ldots c_0, a_1 a_2 \ldots a_r \overline{p_1 p_2 \ldots p_s}$$

Dato che il numero delle cifre di cui è formato l'antiperiodo è r, moltiplichiamo ambo i membri della 1) per 10^r e otteniamo:

$$10^r g = 10^r \cdot c_n c_{n-1} \ldots c_0, a_1 a_2 \ldots a_r \overline{p_1 p_2 \ldots p_s} =$$
$$= c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r, \overline{p_1 p_2 \ldots p_s} =$$
$$= c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r + 0, \overline{p_1 p_2 \ldots p_s} \quad (2)$$

se si pone ora

$$(3) \qquad g_1 = 0, \overline{p_1 p_2 \ldots p_s}$$ e si moltiplicano ambo i membri per 10^s si ottiene:

$$10^s g_1 = 10^s \cdot 0,\overline{p_1 p_2 \ldots p_s} = p_1 p_2 \ldots p_s, \overline{p_1 p_2 \ldots p_s}$$

ossia

$$10^s g_1 = p_1 p_2 \ldots p_s + 0,\overline{p_1 p_2 \ldots p_s} = p_1 p_2 \ldots p_s + g_1$$

da cui

$$10^s g_1 - g_1 = p_1 p_2 \ldots p_s \quad e$$

$$(10^s - 1) g_1 = p_1 p_2 p_3 \ldots p_s$$

$$g_1 = \frac{p_1 p_2 \ldots p_s}{10^s - 1} = \frac{p_1 p_2 \ldots p_s}{\underbrace{1000..0}_{s \text{ zeri}} - 1} =$$

$$= \frac{p_1 p_2 \ldots p_s}{\underbrace{999\ldots9}_{s \text{ nove}}}$$

sostituendo tale valore nella 2), si ha:

$$10^r g = c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r + \frac{p_1 p_2 \ldots p_s}{10^s - 1} =$$

$$= \frac{(c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r)(10^s - 1) + p_1 p_2 \ldots p_s}{10^s - 1} =$$

$$= \frac{c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r \overbrace{00 \ldots 0}^{s \text{ zeri}} + p_1 p_2 \ldots p_s}{10^s - 1} +$$

$$- \frac{c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r}{10^s - 1} =$$

$$= \frac{c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r p_1 p_2 \ldots p_s - c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r}{10^s - 1}$$

e infine

$$g = \frac{c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r p_1 p_2 \ldots p_s - c_n c_{n-1} \ldots c_0 a_1 a_2 \ldots a_r}{(10^s - 1) \cdot 10^r}$$

ma $10^s - 1 = \underbrace{999 \ldots 9}_{s \text{ nove}}$; $10^r = \underbrace{10000 \ldots 0}_{r \text{ zeri}}$

quindi la regola che conosciamo.

11

La frazione generatrice di un numero decimale periodico misto ha per numeratore la differenza fra il numero decimale senza tener conto della virgola e il numero formato dalle cifre della parte intera seguito dall'antiperiodo; ha per denominatore tanti nove quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Alla conclusione della presente esposizione viene spontaneo domandare se esistano frazioni (generatrici) che possano rappresentare indifferentemente un numero decimale periodico sia misto che semplice; a pag. 6 abbiamo incontrato, per caso, il numero decimale periodico misto

$$0,2\overline{32} \qquad (1)\ ;$$

tale numero può considerarsi come decimale periodico semplice

$$0,\overline{23} \qquad (2)$$

La frazione generatrice del n. 1 risulta

$$0,2\overline{32} = \frac{232-2}{990} = \frac{230}{990} = \frac{23}{99}$$

e la frazione generatrice del n. 2 risulta

$$0,\overline{23} = \frac{23}{99}$$

per cui si evince che la frazione $\frac{23}{99}$ è la generatrice di due numeri periodici uno semplice e uno misto.

Generalizzazione

Sia, pertanto, dato il numero decimale periodico misto:

$$c_n c_{n-1} \dots c_0 , a_1 a_2 \dots a_r \overline{p_1 p_2 \dots p_s}$$

la cui frazione generatrice risulta:

$$g = \frac{c_n c_{n-1} \dots c_0 a_1 a_2 \dots a_r p_1 p_2 \dots p_s - c_n c_{n-1} \dots c_0 a_1 a_2 \dots a_r}{(10^s - 1) 10^r}$$

Se vogliamo che la frazione g rappresenti un numero decimale periodico semplice è sufficiente che il numeratore presenti il fattore 10^r; in tal caso dividendo numeratore e denominatore per 10^r la frazione semplificata conterrà a denominatore soltanto

$$10^s - 1 = \underbrace{999 \dots 9}_{s \text{ nove}}$$

Perchè ciò accada è necessario che sia $r < s$ e che il gruppo delle ultime r cifre del periodo rappresenti un numero uguale al periodo quindi deve risultare:

$$p_s = a_r ,\ p_{s-1} = a_{r-1} ,\ p_{s-2} = a_{r-2} , \dots p_{s-(r-1)} = a_1$$

Verificate tali condizioni il numeratore della frazione g risulterà multiplo di 10^r.

13

Esempio:
Costruire l'antiperiodo del numero decimale periodico misto:

$3,a_1a_2\overline{123}$ perchè la frazione generatrice corrisponda a un numero decimale periodico misto e semplice contemporaneamente.

Intanto le cifre dell'antiperiodo sono due e le cifre del periodo sono tre; la condizione $r=2<s=3$, pertanto è soddisfatta.

Basta, quindi, che risulti:

$a_2=3$, $a_1=2$ e perciò il numero decimale periodico dato può essere scritto

(1) $3,a_1a_2\overline{123} = 3,23\overline{123}$

ma lo stesso numero può essere scritto

(2) $3,23123123123... = 3,\overline{231}$ per cui la frazione generatrice del numero (1) sarà

$$3,23\overline{123} = \frac{323123-323}{99900} = \frac{322800}{999{,}00} = \frac{3228}{999} = \frac{1076}{333}$$

e la frazione generatrice del 2) numero sarà:

$$3,\overline{231} = \frac{3231-3}{999} = \frac{3228}{999} = \frac{1076}{333}.$$

Giuseppe Critta

Errata Corrige

Segnaliamo queste correzioni ai refusi riscontrati nell'articolo del Prof. Ditta pubblicato nel numero-10-della nostra rivista.

Pag.	rigo	errata	corrige
98	5	acchitto	acchito
»	10	patire	partire
»	10	nodo	modo
»	10	geometrica	aritmetica
99	11	qundi	quindi
100	5	n(n + 1)4/8	n4(n + 1)4/8
»	7	n -1	n +1