Sezione Scientifica

Teaching Mathematics and its Applications Advance Access published May 31, 2009

Teaching Mathematics and Its Applications Page 1 of 4
doi:10.1093/teamat/hrp012

A proof of the converse of the Pythagorean proposition

ALDO SCIMONE[†]
via C. Nigra 30 – 90141 Palermo (Sicily)

[Submitted March 2009; accepted April 2009]

The article presents a demonstration of the converse of the Pythagorean Theorem based on the *reductio ad absurdum*. This is necessary to overcome the discrepancy, noticed by pupils, between the Euclidean purpose to demonstrate that the given triangle is right-angled and the auxiliary figure by which the given triangle is drawn as if it were already a right-angled one. To the eyes of students this does not make the Euclidean reasoning clear.

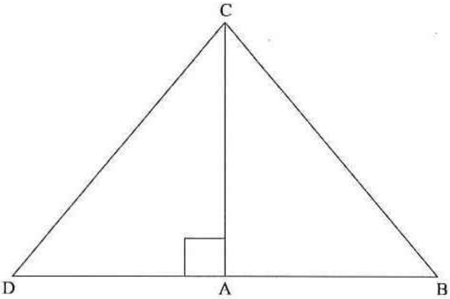
1. Introduction

Nearly all the demonstrations (Hartshorne, 1997; Loomis, 1968; Serra, 2008) of the converse of the Pythagorean theorem closely follow the demonstration given by Euclid of the I, 48 (Heath, I, 368–369) into his *Elements*:

If in a triangle the square on one of the sides equals the sum of the squares on the remaining two sides of the triangle, then the angle contained by the remaining two sides of the triangle is right.

So, if a, b and c are the lengths of the sides of the triangle ABC and $a^2 = b^2 + c^2$, one has to prove that the $\angle$BAC is right.

Euclid goes on by constructing a triangle ADC with the characteristic of being a right-angled one, with AC in common and AD = AB.



(This figure appears in colour in the online version of *Teaching Mathematics and its Applications.*)

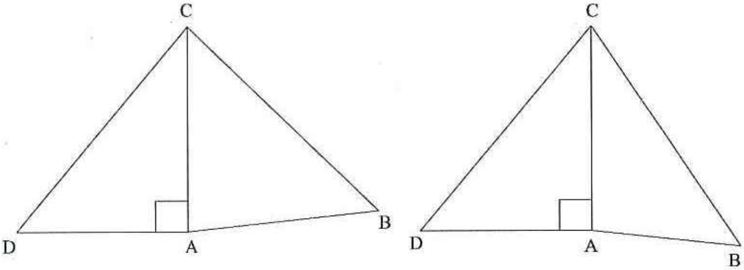
[†]Email: aldo.scimone@libero.it

He exploits a series of algebraic equalities between the sides of the two triangles ABC and ACD, which make him conclude that they are congruent.

Finally, he is able to apply the I, 8 [*If two triangles have two sides respectively equal to two sides, and have the base equal to the base, they will have equal also the angles included by the equal sides as well*] and concludes that the ∠BAC is right.

Well, strangely enough the main setback preventing the students from fully understanding Euclid's demonstration depends on the fact that the triangle ABC is drawn as if we already knew that it is a right-angled one. So, in some geometry textbooks (Serra, 2008) it is preferred to draw the two triangles separately, but the former is always drawn right-angled, and this just avoids the problem, does not work it out.

A possible solution could be to draw the triangle ABC with the ∠BAC acute or obtuse, but this can give rise to some misunderstandings (Duval, 2002) by pupils, because when one claims that the two triangles are congruent the image of the triangle ABC can disturb their understanding that BC = CD.



(This figure appears in colour in the online version of *Teaching Mathematics and its Applications*.)

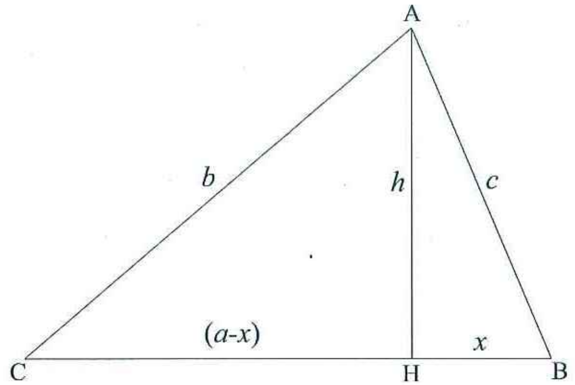
The problem is thought to be solved by giving a different demonstration from Euclid's one, through a *reductio ad absurdum*, using the proposition VI, 8, that is what nowadays is called the first Euclid's theorem, and is used in almost all geometry textbooks in order to demonstrate the direct Pythagorean theorem, i.e. the I, 47, (Heath, I, 349) into the *Elements*. The VI,8 proposition (Heath, II, 209) claims that:

If in a right-angled triangle a perpendicular is drawn from the right angle to the base, then the triangles adjoining the perpendicular are similar both to the whole and to one another.

2. Proof

If a, b and c ($a > b > c$) are the lengths of the three sides of a triangle ABC and they satisfy the Pythagorean equation, $a^2 = b^2 + c^2$, the triangle must be a right-angled one.

One has to demonstrate that the ∠BAC is right. Let us assume ∠BAC is not a right angle, and draw the altitude AH.



(This figure appears in colour in the online version of *Teaching Mathematics and its Applications*.)

One has:

$$h^2 = c^2 - x^2$$

and

$$h^2 = b^2 - (a - x)^2$$

So

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2ax \tag{1}$$

For the hypothesis, we know that $a^2 = b^2 + c^2$, therefore one has:

$$c^2 = ax \tag{2}$$

This is a contradiction because (2) is nothing but the VI,8 which is valid only in a right-angled triangle,

while we have supposed that $\angle$BAC is not right.

We have the same contradiction if we substitute $c^2 = a^2 - b^2$ into (1). In fact we get:

$$b^2 = a(a - x)$$

i.e. the same relation given by VI,8. So $\angle$BAC must be a right angle.

The author is indebted to the anonymous referee for the valuable suggestions and comments which helped to improve this work.

References

Duval, R. (2002) Proof understanding in mathematics: what ways for students? *International Conference on Mathematics – 'Understanding proving and proving to understand'* (F. L. Lin ed.). Taipei: NSC and NTNU, pp. 61–77.

Hartshorne, R. (1997) *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer.

Heath, T. L. (1956) (3 vols.) The Thirteen Books of Euclid's Elements. 2nd edn. New York: Dover Publications.

LOOMIS, E. S. (1968) *The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of 'Proofs'*, 2nd edn. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

SERRA, M. (2008) *Discovering Geometry. An Investigative Approach.* New York: Key Curriculum Press.

Aldo Scimone, PhD (Mathematics Didactics) is a secondary school teacher of mathematics and supervisor for mathematics teachers at SISSIS (University of Palermo). His current research interests centre on elementary number theory, geometry, the history of mathematics and the mathematics didactics. His last book is: 'Talete, chi era costui? Vita e opera dei matematici incontrati a scuola (Thales, who was he? The life and works of mathematicians met at school), 2006, Palumbo.'

ALDO SCIMONE

Libri S-Consigliati

"'Un'occhiata alle carte di Dio"' di Gian Carlo Ghirardi - ilSaggiatore Tascabili

Nel desolante panorama della divulgazione scientifica, dominata da interessi commerciali e dall'illusione, per irretire il lettore, che i grandi problemi e le grandissime scoperte della scienza siano di facile comprensione, una piacevolissima sorpresa è stata la pubblicazione di questo libro, decisamente fuori dal coro. L'autore, noto fisico teorico dell'università di Trieste, esplicitamente nella prefazione accenna al patto 'faustiano' di aver scritto un libro, che pur elementare dal punto di vista formale, esige dal lettore un serio e faticoso sforzo per comprendere ed assimilare i temi della grande fisica del ventesimo secolo. Si evita l'errore di credere che basta semplificare la matematica per capire la fisica. In fisica i ragionamenti sono sottili e complessi. La matematica è un aiuto prezioso, certamente uno strumento del pensiero fisico, che ci permette di padroneggiare mondi così lontani dalla nostra quotidiana esperienza. In questo libro i ragionamenti sono corretti e mai superficiali. La fisica è spiegata con chiarezza senza facili semplificazioni, tanto care ai divulgatori della domenica, che sono come costruttori di un grattacielo sottomarino con...mattoni di sale. E si parla del mondo degli atomi che si discosta, per parecchi ordini di grandezza, dal mondo a noi familiare e sul quale si sono formate le nostre categorie mentali. Anche i fisici oltre che il comune lettore si trovano disorientati. E' stato compito dell'autore guidare il lettore in qesto affascinate viaggio nel microcosmo con virgiliana perizia. Anche il fisico professionista oltre che il professore di fisica troverà in questo testo materiale di riflessione ed informazioni esaurienti che arricchiranno al sua cultura scientifica. La storia raccontata ha un inizio, ormai classico, con il problema della radiazione termica e della incombente 'catastrofe ultravioletta' che agitava i pensieri di tutta la comunità scientifica negli ultimi decenni dell'ottocento. Rayleigh e Jeans avevano trovato, con un'impeccabile deduzione teorica, che la funzione tipica di questo tipo di problemi ovvero la densità di energia spettrale aveva la forma:

$\boxed{1}$

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT$$

Formula che non rispecchia la realtà fisica in quanto implica che in qualsiasi cavità e a qualsiasi temperatura ci sarebbe una quantità infinita di energia[1]. È questa una prima apparizione del fantasma dell'infinito che anche oggi affligge i fisici teorici, ma in tutt'altro contesto (la teoria quantistica dei campi). Comunque, come sappiamo, la storia è a lieto fine in quanto Plank trovò il fattore di taglio che Jeans, invano, aveva cercato. Sostituì, infatti, kT con $(h\nu)[\exp(h\nu/kT) - 1]^{-1}$ e l'operazione matematica funzionò. Ed ancora: come mai gli atomi hanno sempre dimensioni dell'ordine di $\sim 10^{-10}m$? Non c'è alcuna ragione, pensavano i fisici del primo novecento, perché un atomo di idrogeno che urta in continuazione contro altri atomi, mantenga semmpre la stessa grandezzza. Un fatto questo che ignora le leggi della fisica classica e che, forse, avrebbe deliziato Pitagora e Keplero[2]. Si è avuta allora quella rivoluzione concettuale che l'autore chiama 'crollo della visione classica del mondo'. Si imponeva la costruzione di una nuova visione, di un nuovo paradigma con la costruzione di un diverso apparato teorico. Negli anni trenta del novecento, grandi fisici teorici hanno costruito una rete di costrutti teorici, inquadrati in una teoria chiamata meccanica quantistica che non soltanto spiega i fenomeni osservati, ma ha previsto anche nuovi e affascinanti fatti dalle notevoli ricadute sulla vita quotidiana di noi tutti. la struttura concettuale della nuova teoria e la sua interpretazione differiscono in modo radicale dal paradigma classico che descrive oggetti accessibili alla nostra quotidiana esperienza e ha un contenuto strettamente deterministico. Quando poi, dal punto di vista classico, si parla di probabilità, ci si riferisce **sempre** ad una probabilità **epistemica**. Le regole del gioco nella meccanica quantistica sono descitte nella seguente tabella

[1]Come facilmente si vede integrando la funzione rispetto alla variabile ν con $\nu = 0$ e $\nu \to +\infty$

[2]I due, pur avendo vissuto in epoche assai diverse, pensavano ad un modello di universo armonico dove ogni oggetto celeste si muoveva in modo indipendente dalle condizioni iniziali, proprio come avviene, invece, nel mondo degli atomi

$\boxed{2}$

- Stati $\Longleftrightarrow$ vettori di uno spazio vettoriale metrico.
- Probabilità di transizione : $| < A|B > |^2$..
- Gli stati, risultati di una serie di misure, formano una base.
- Data una grandezza ξ, la probabilità di ottenere, come misura su uno stato A, ξ' è : $| < A|\xi' > |^2$.
- Ad ogni grandezza è associato un operatore $\hat{\xi}$.
- Valor medio di una grandezza : $< A|\xi|A >$.
- Stati ottenuti dalle misure : autovettori.
- Risultati delle misure : autovalori.

che sintetizza le fondamenta dell'apparato teorico che i fisici hanno costruito per descivere lo strano, affascinante mondo delle particelle elementari. Due punti vanno sottolineati con forza:

- La probabilità quantistica differisce dalla probabilità classica in uso, per esempio nella meccanica statistica, in quanto non soddisfa gli assiomi di Kolmogorov che sono stati alla base della formalizzazione della 'mensura sortis' di pascaliana memoria. Infatti nella probabilità classica abbiamo la relazione

  $$P(A+B) \leq P(A) + P(B)$$

  dove A e B rappresentano due eventi casuali. In tanti esperimenti che il libro riporta, in modo chiarissimo e formalmente corretto, questa disuguaglianza è violata. **In meccanica quantistica si sommano le ampiezze, cioe i vettori di stato, non le probabilità.**
- La probabilità, nella meccanica quantistica, **non** è epistemica, ma **ontica**. Democrito, **che il mondo a caso pone**[3], aveva ragione!
- Il principio di sovrapposizione, che nel libro è mirabilmente discusso nel quarto capitolo, è assai diverso dal principio classico dove si sommano, come nel caso delle onde, due funzioni che rappresentano due

[3]Dante - La Divina Commedia - Inferno

onde diverse che si trovano nella stessa regione dello spazio. Quì, invece, si sommano gli stati diversi di una stessa particella. Ne deriva la sconvolgente novità che non si può dire, prima della misura, che la particella si trovi nello stato A o nello stato B o in entrambi gli stati o in nessuno di essi. Non abbiamo la probabilità che la paricella **sia** nello stato A o nello stato B, ma la probabilità che **venga trovata in uno dei due stati se si esegue una misura**. Un fatto davvero peculiare che certamente incuriosisce le menti capaci di pensare.

La seguente tabella esemplifica questo fatto nel caso dell'osservabile energia, il cui spettro non ha due, ma n valori distinti, di un oggetto quantistico .

$\boxed{3}$

$$\left.\begin{array}{r}\Psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots + c_n\psi_n \\ \text{Il valore dell'energia non è noto}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{misura dell'energia}} \left\{\begin{array}{r}\Psi_n = c_n\psi_n \\ \text{Energia} = E_n\end{array}\right.$$

Il quadro teorico della meccanica quantistica che il libro propone si può riassumere dicendo che:

1. Le osservabili quantistiche possono avere uno spettro discreto (come nell' esmpio riportato nella tabella 2.), continuo o una combinazione dei due casi. Le osservabili non possono qundi, come nel caso della meccanica classica, essre rapppresente da variabili reali, ma da operatori.

2. Operatori questi dalla caratteristica[4] che i loro autovalori, possibili risultati delle misure, devono essre numeri reali.

3. Le osservabili possono non commutare ed allora si possono introdurre differenti rappresentazioni come nel caso delle osservabili posizione e quantità di moto.

4. La non commutabilità implica che ci sono dei limiti alle informazioni che posiamo ricavare dalle misure.

Per buona parte del libro, poi, si discute con una maestria che non ho ritrovato in nessun altro testo divulgativo, di fotoni e dell'osservabile polarizzazione che ha invece due stati di base distinti. Ma cosa è il fotone: una nuova

[4]Si dicono infatti Hermitiani.

particella elementare, di massa nulla, che possiede energia, impulso e momento angolare, proposta da Einstein nel 1905 come oggetto teorico. E per quasi vent'anni fu il solo fisico che credette anche alla reale esitenza di questa strana particella cui dobbiamo il magnifico dono della visione.La tabella che permette di calcolare tutte le probabilità in esperimenti con i fotoni come quelli descritti nel libro é:

$$\boxed{4}\quad \begin{array}{c} \\ <x| \\ <y| \\ <x'| \\ <y'| \\ <R| \\ <L| \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} |x> & |y> & |x'> & |y'> & |R> & |L> \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \sin\vartheta & \cos\vartheta & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\vartheta & \sin\vartheta & 1 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\vartheta} & \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\vartheta} \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\vartheta} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\vartheta} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\vartheta} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\vartheta} & 1 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}}e^{i\vartheta} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\vartheta} & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

L'autore, invero, non usa i numeri complessi, assolutamente indispensabili nello sviluppo tecnico della meccanica quantistica, pur tuttavia con così poca matematica riesce a dare l'essenziale comportamento di questa particella e a trasmettere la stupefacente meraviglia che tutti i fisici provano quando ne studiano le proprietà. Il libro si compone di diciotto capitoli che spaziano dall'attenta analisi dei fatti sperimentali che hanno incrinato il maestoso edificio della fisica classica all'epocale dibattito tra Einstein e gli altri fisici, tra cui Bohr, negli anni trenta del trascorso secolo, alle nuove interessanti applicazioni, alla crittografia e ai computers quantistici, che sono all'orizzonte prossimo venturo. Specialmente il dibattito guidato da Einstein, fatto di mirabolanti esperiemnti concettuali come il famoso paradosso EPR[5] (Einstein, Podolsky, Rosen), ha trovato un terreno sperimentale negli ultimi due decenni e ha chiarito il vero significato della nozione di 'località', di stati fattorizzati e di stati intrecciati che , vengono usualmente etichettati con una orribile parola inglese 'entangled. Il famoso dibattito, certo uno dei più celebri nella storia della fisica, tra l'altro si caratterizzò per

1) L'idea einsteiniana di considerare un sistema macroscopico il cui stato

[5] L'autore opportunamente lo definisce un fulmine a ciel sereno nel mondo della fisica teorica della prima metà del novecento

dipende da un fenomeno casuale. Il problema fu ripreso da Schrödinger con il suo famoso paradosso del gatto.
2) Il 'paradosso' EPR che impone, anche, di considerare le relazioni di indeterminazione come inevitabile conseguenza dell'apparato formale della meccanica quantistica.
Ed quindi una nota singolare: I tanti sistemi descritti dalla fisica classica, la cui natura è essenzialmente determinstica, sono estremamente sensibili alle condizioni iniziali. I sistemi quantistici invece, governati da una teoria sostanzilmente stocastica, sembrano insensibili alle condizioni iniziali. Comunque per dissipare l'ambiguità di linguaggio che aleggia intorno al significato della parola 'locale'in fisica, dirò tra loro locali (ma preferirei usare un altro termine, per esempio, disaccoppiate) due osservabili A e B di un sistema se accade sempre che la probabilità di ottenere per l'osservabile A il valore a e per l'osservabile B il valore b è il prodotto delle probabilità per le misure separate di A (valore a) e di B (valore b). E' questo, comunque si scelga a e b, è lo stato del sistema. Sono stati fattorizzati. In tal senso, per esempio, le due osservabili di spin di due elettroni in un atomo di He non sono disaccoppiate secondo la meccanica quantistica, perché esistono stati in cui vale la relazione 14.7 del libro:

$\boxed{5}$

$$\Psi_A(1,2) = N[\Phi(1)\Xi(2) - \Phi(2)\Xi(1)]$$

Si tratta di uno stato non fattorizzato e quindi intrecciato (entangled). Come si nota la separazione spaziale non c'entra: ecco perché mi sembra sconsigliabile l'uso della parola locale. Poi ci sono le osservabili separate spazialmente: il libro dà la definizione tecnica e bellissimi oltre che istruttivi esempi come le osservabili polarizzazione del fotone ricevuto da Alice e polarizzazione del fotone ricevuto da Bob. Qui giova sottolineare la separazione spaziale in senso relativistico e, come l'autore opportunamente fa, tutto ciò che ne consegue. Infine la località: si postula che una teoria è locale se in essa le osservabili separate spazialmente sono sempre disaccoppiate. Il teorema di Bell, magistralmente discusso dall'autore, dimostra che una teoria locale è osservativamente distinguibile dalla meccanica quantistica. Infatti essa deve soddisfare le famose disuguaglianze che la meccanica quantistica non soddisfa. Tutto nasce dalla descrizione di sistemi di particelle identiche. Problema centrale nella meccanica quantistica, come la sovrapposizione precedentemente discussa, dal momento che si ha che fare con particelle come gli elettroni che smentite che il progresso del pensiero scientifico ha dato ad una delle affermazioni di Leibniz sull'individualità degli indiscernibili. Leibniz scrisse: **Non si trovano mai in natura due entità esattamente simili relativamente alle quali non si possa trovare una differenza interna.** Questa frase riportata nel libro all'inizio del cap.14 è stata confutata dal formalismo quantistico e dagli straordinari sviluppi concettuali, epistemologici e pratici che ne sono derivati come nello stesso capitolo e nei successivi esaurientemente si informa il felice lettore. C'è ancora da rimarcare la sostanziale differenza tra la non località quantistica e la non località newtoniana ed il capitolo undicesimo provvede, inutile dirlo, egregiamente allo scopo. Infine negli ultimi tre capitoli, l'autore, novello Lucrezio, alla stregua dell'antico poeta dedito alla ricerca di un quadro coerente per tutti i processi naturali, postula per risolvere l'irrisolto problema della misura, dell'interazione tra il fenomeno microscopico ed l'attrezzatura sperimentale macroscopica, un nuovo **clinamen**, aggiungendo incertezza ad incertezza. Leggere per credere! Certo queste 'poche' righe non bastano a lumeggiare l'incredibile ricchezza intellettuale di questo libro e la grande soddisfazione che il lettore interessato proverà alla fine dell'avventuroso viaggio nella fisica quantistica, così efficacemente raccontata dall'autore. In definitiva possiamo dire, con Feynman, che Dio gioca a dadi, ma li getta là dove non possiamo vederli e come lo stesso Einstein, in una lettera a Schrödinger, affermò:

> La vera difficoltà dipende dal fatto che la fisica è una sorta di metafisica: la fisica descrive la **realtà**. Ora noi non sappiamo cosa sia la **realtà**, ma la conosciamo solamente attraverso la descrizione che ne dà la fisica.

Antonino Gentile

[6] La massa è $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$, la carica vale $q = -1,6 \cdot 10^{-19} C$ e lo spin ha modulo $|\vec{S}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$, ma le componenti, in una qualsiasi direzione, possono assumere solo i valori $\frac{1}{2}\hbar$ o $-\frac{1}{2}\hbar$.

"Il bizzarro mondo dei quanti"' di Silvia Arroyo Camejo - Springer

Il quadro: una ragazza diciannovenne , alle soglie dell'esame di maturità tedesco, autrice di un libro sul 'bizzaro mondo degli atomi', alcuni illustri cattedratici che ne cantano le lodi, una prestigiosa casa editrice, di fama non solo europea, che lo pubblica. Ci sono tutti gli ingredienti per gridare al miracolo della divulgazione scientifica di qualità. E invece? Un disastro, un autentico disastro. L'autrice, cui forse si deve la scusante della giovane età, ci propina un libro, come documenterò, zeppo di grossolani errori. Non scuserò invece i suoi mentori professori che hanno avallato un'autentica truffa ai danni dell'ingenuo lettore indotto a comprare il libro dall'autorevolezza degli sponsorizzatori e dalla notorietà della casa editrice. Cominciamo con il rilevare che, a pag.112, l'autrice volendo calcolare l'energia potenziale del duo elettrone + protone nell'atomo di idrogeno scrive: $E = Fr$ sostituendo poi ad F la nota relazione della forza coulombiana. Un errore che, nella sua gravità, fa dubitare della conoscenze fisiche, anche elementari, dell'autrice. Infatti, essendo la forza di Coulomb variabile con la distanza elettrone - protone, bisogna fare un integrazione per ricavare correttamente il risultato dell'energia potenziale. Oppure con un procedimento euristico, dal momento che conosciamo il risultato finale, mettere al posto della distanza r la media geometrica delle posizioni iniziale e finale dell'elettrone rispetto al protone, considerato, in questo calcolo, fermo. Il modello dell'atomo di Bohr prima viene definito fantastico ed appena qualche riga dopo 'non troppo buono'. Una certa confusione frutto, forse, di affrettate letture grava su queste pagine e in gran parte sull'intero libro. Libro che si compone di diciassette capitoli che affrontano tutte le tematiche della meccanica quantistica non relativistica. Sono argomenti complessi e delicati che vengono trattati con sciatta supeficialità e notevole improprietà di linguaggio. Un primo esempio: il problema dellla catastrofe ultravioletta che ha dato inizio alla fisica quantistica viene introdotto presentando la legge di Rayleigh-Jeans :

$$P(\lambda; T) = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4}$$

e si dice che P rappresenta la potenza della radiazione. Non è vero, come peraltro una semplice analisi dimensionale confemerebbe. Al primo membro della relazione di R-J c'è la densità di energia spettrale, cioé l'energia per unità di volume e di lunghezza d'onda, denotata usualmente con la lettera $u(\lambda, T)$ che si misura in J/m^4 e non , come la P, in $J/s = W$. Nella pagina seguente poi si propina all'ignaro lettore la formula di Planck dove, al primo menbro, ci dovrebbe essere la $u(\nu, T)$, cioé la densità di energia per unita di volume e di frequenza, misurata in Js/m^3 e non la P, ripetendo quindi lo stesso errore e non spiegando come si passi dalla u funzione della lunghezza d'onda alla u funzione della frequenza[1]. Al lettore sembrerà un incomprensibile gioco di prestigio. Poi si descrivono i due effetti che hanno consacrato il fotone come particella quantistica: l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton. L'autrice nelle diciannove pagine che dedica alla fenomenologia dei due effetti è capace di confondere l'urto classico con quello quantistico, il paradigma ondulatorio della radiazione con il paradigma quantistico. Paradigmi che, quasi tutti, sanno essere incompatibili. Per le particelle quantistiche, infatti, non ha senso parlare di traiettoria, non ci sono quindi scontri, come l'autrice incautamente propone. Per il fotone poi, **particella di massa nulla**, l'osservabile posizione non ha alcun significato. L'effetto fotoelettrico è un urto **quantistico anelastico**[2] in cui sono coinvolti tre oggetti: l'elettrone, il fotone ed il reticolo cristallino del metallo cui appartiene l'elettrone e dal punto di vista cinematico va trattato con le tecniche della cinematica relativistica[3]. Infatti se l'elettrone fosse libero l'urto anelastico non potrebbe avvenire come agevolmente si prova:

1 Dalla conservazione dell'energia e della quantità di moto si ha:

$$\frac{h\nu}{c} = m_e v$$

$$m_e c^2 + h\nu = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}$$

da cui per confronto e poi quadrando si ottiene l'assurda conclusione

$$m_e c^4 = 0$$

Nell'effetto Compton, invece, l'elettrone si considera libero per le alte energia in gioco nell'urto[4] e l'urto stesso è **elastico**. Si parte con due ogetti, elettrone

[1]Bisogna utilizzare la relazione $f(\nu)d\nu = f(\lambda)d\lambda$ e la formula $\nu\lambda = c$

[2]Si parte con tre oggetti e dopo l'urto ne rimangono due. Il fotone viene assorbito.

[3]Per la dinamica del fenomeno bisogna utilizzare la QFT, la quantum field theory o teoria quantistica dei campi.

[4]Rispetto all'energia di legame del sistema elettrone - reticolo cristallino.

e fotone, e dopo l'urto si hanno ancora un eletrone e un fotone con energie e quantità di moto diverse. Compton ne ricavò una relazione generale che anche l'autrice riporta, dopo un farraginoso calcolo che occupa ben tre pagine dell'inutile testo, in termini di lunghezza d'onda:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi)$$

Il calcolo è molto semplice se si usano le giuste notazioni. Infatti se indichiamo con ϵ ed ϵ' le energie del fotone prima e dopo l'urto elastico quantistico e con E l'energia dell'elettrone dopo l'urto (prima dell'urto vale mc^2), possiamo scrivere la prima relazione:

$$\epsilon + mc^2 = \epsilon' + E$$

Una seconda relazione si costruisce utilizzando le quantità di moto del fotone e dell'elettrone prima e dopo l'urto. Le indichiamo rispettivamente con $\vec{p}, \vec{p'}, \vec{q}$ e scriviamo:

$$\vec{p} = \vec{p'} + \vec{q} \quad \rightarrow \quad \vec{p} - \vec{p'} = \vec{q}$$

Quadrando le due relazioni, moltiplicando la prima per c^2 e sottraendo la seconda dalla prima, si ottiene , dopo elementari semplificazioni, la relazione di Compton in termini dell'angolo di diffusione del fotone φ e delle quantità di moto del fotone stesso:

$$1 - \cos\varphi = mc\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)$$

Poi, nella versione della formula che si trova nel libro scritta utilizzando la lunghezza d'onda[5], non si fa notare il fatto, assai interessante, che la differenza $\lambda' - \lambda$ è maggiore di zero e non dipende da λ. L'uso, anzi l'abuso, della grandezza lunghezza d'onda, tipica della descrizione ondulatoria, riferita al fotone non può che ingenerare l'idea che il fotone si un onda. Il fotone non è un'onda. Si descrive con un numero complesso variabile, numero che ha una fase che cambia spazialmente e temporalmente. Questi variazioni sono detti lunghezza d'onda e frequenza nel gergo ondulatorio, ma il fatto che si usano questi termini non ci autorizza a pensare e a dire che il fotone sia un onda così come il fatto che i delfini vivano in mare non significa che sono pesci. Ma purtroppo c'è di più. L'autrice, affezionata all'idea dell'urto classico, attribuisce una massa al fotone con un ragionamento errato, tipico di tanti divulgatori più o meno blasonati. Questi signori ragionano così:

[5]E' facile passare dall'una all'altra versione sapendo che $\lambda = \frac{h}{p}$.

- La radiazione è fatta di fotoni e che ogni fotone è dotato di una quantità di energia, legata alla frequenza dalla nota relazione: $E = h\nu$.
- La relatività postula che $E = mc^2$. Quindi il fotone avendo energia ha anche massa che l'autrice batttezza come massa dinamica ed altri come massa inerziale da cui ricavano che i fotoni pesano, sentono l'attrazione gravitazionale e altre cavolate del genere.

L'errore consiste nella sbagliata lettura della relazione $E = mc^2$ che si riferisce all'energia di una particella, **misurata nel riferimento in cui è ferma**[6]. Siccome non esiste un riferimento in cui il fotone appare fermo, tutto il ragionamento miseramente crolla. Nei riferimenti in cui la particella appare in moto, bisogna usare le relazioni:

$$\boxed{[2] \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Nella due relazioni incorniciate, per il fotone, bisogna fare il limite per $m \to 0$ e $v \to c$ e ottenere, con il rapporto tra p ed E, la formula corretta $E = pc$. Ormai risulta chiaro che la strada della divulgazione della meccanica quantistica intrapresa dell'autrice è piena di grossolani errori e concettuali fraintendimenti. Un ultima segnalazione è d'uopo per la sua esemplarità, dato che la si ritrova in moltissimi testi, anche nei manuali scolastici. A pag.120 e seguenti, dopo aver pasticciato con l'equazione di Schrödinger[7], si trova scritto: il quadrato del modulo della funzione d'onda $|\Psi(x,t)|^2$ di una particella fornisce la probabilità che la particella si trovi nel luogo x all'istante t.... Poiché l'osservabile posizione, la x, **non è quantizzata**, non ha senso domandarsi, se la si troverà in un preciso punto. Può assumere qualsiasi valore di x per cui $|\Psi(x,t)|^2 \neq 0$. La $|\Psi(x,t)|^2$ è una densità di probabilità e la domanda giusta rigurda la probabilità che, dopo una misura di posizione, la particella venga trovata in un intervallo di prefissata misura centrato sula

[6]Per riferiemto si intende un laboratorio rispetto al quale vanno fatte le misure delle grandezze fisiche in gioco.

[7]Non chiarisce le tre fondamentali caratteristiche dell'equazione:1) Perché l'equazione contiene la derivata prima in t e la derivata seconda in x? 2) Perché le soluzioni sono complesse? 3) Perché l'equazione è complessa?

posizione x. Si badi che questo non significa che, prima della misura, la particella **sia nell'intervallo o fuori o in qualsiasi altro posto**[8]. Ne è nato, negli anni trenta del novecento, un dibattito di altissimo valore concettuale che dura tutt'ora e che l'autrice registra con qualche lacuna e molte imperfezioni. In definitiva penso che il testo abbia una sola funzione didattica: essere di valido ausilio in qualche gioco in cui si pratichi la caccia all'errore.

Antonino Gentile

[8]La questione è discussa con cristallina chiarezza nel magnifico libro 'Un'occhiata alle carte di Dio' del Prof.G.C.Ghirardi che abbiamo recensito in questo stesso numero del 'Fardella'.