G. DITTA

MONOGRAFIA

Gli sviluppi in serie di Fourier e i collegamenti con le funzioni euleriane di 1^ e 2^ specie.

1

1) Sono dette funzioni euleriane o anche integrali euleriani, le espressioni:

$$(*)\qquad B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \quad (1^a \text{ specie})$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx \quad (2^a \text{ specie})$$

chiamate anche funzioni Beta e Gamma, definite per tutti i valori positivi di m, n, α; l'integrale $\Gamma(\alpha)$ è improprio ed è imparentato con la trasformata di Laplace:

$$L[f(x)]=\int_0^{+\infty} f(x)\,e^{-px}dx \quad \text{ove } p>0.$$

abbiamo detto che $\Gamma(\alpha)$ è rappresentata da un integrale improprio, o generalizzato, e pertanto sarà:

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int e^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

integrale che risulta convergente per $\alpha>0$ e quindi $\Gamma(\alpha)$ esiste.

2) Alcune proprietà delle funzioni euleriane:

I) $$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^{\alpha}e^{-x}\right]_0^x+$$
$$+\alpha\lim_{x\to+\infty}\int_0^x x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

e dato $\lim_{x\to+\infty}\left[-x^{\alpha}e^{-x}\right]_0^x=0$, risulta:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

II) Riprendiamo l'integrale:

2)
$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$
ed eseguiamo il cambiamento di variabile ponendo:
$$x=1-z$$
e di conseguenza si ha
$$dx=-dz$$ e
per $x=0 \longrightarrow z=1$
" $x=1 \longrightarrow z=0$
e sostituendo nell'integrale $B(m,n)$:
$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=-\int_1^0 (1-z)^{m-1}z^{n-1}dz=$$
$$=\int_0^1 z^{n-1}(1-z)^{m-1}dz=B(n,m)$$ dunque
$$B(m,n)=B(n,m)$$
III) Supponiamo n intero e maggiore di 1:
integrando per parti si ottiene:
$$B(m,n)=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1);$$
con tale formula di ricorrenza si perviene a:
$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(m-1)!\,m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)(m+n-1)}=$$
$$=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$
Un caso molto importante che sarà collegato con lo sviluppo di Fourier, è quello per cui sia:
$$m+n=1 \quad \text{ossia} \quad m=1-n$$

3

quindi $B(1-n, n) = \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(n)}{\Gamma(1)}$ con $0<n<1$;

poichè $\Gamma(1) = 1! = 1$ la precedente diventa:

$$B(1-n, n) = \Gamma(1-n)\Gamma(n) \quad (1)$$

A tale punto è ora di tirare in ballo lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione $f(x)$; premettiamo le condizioni di sviluppabilità secondo Dirichlet.

Se $f(x)$:

1) è definita in un intervallo $[-L, L]$ tranne, al più, in un numero finito di punti;

2) è periodica fuori dell'intervallo $[-L; L]$ con periodo $2L$;

3) e la sua derivata prima sono continue (anche a tratti) in tutto l'intervallo $[-L, L]$

allora,

soddisfatte dette condizioni, la serie di Fourier converge ad $f(x)$ in ogni punto di continuità; converge invece, alla media aritmetica dei limiti destro e sinistro, in ogni punto di discontinuità.

Precisazioni:

a) Le condizioni 1), 2), 3) sono soltanto sufficienti in quanto non si conoscono condizioni necessarie e sufficienti.

b) Per quanto riguarda la periodicità per la $f(x)$, esternamente all'intervallo $[-L, L]$ non implica la periodicità di $f(x)$

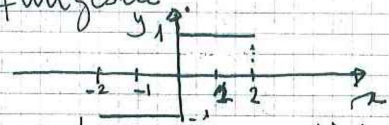
4

all'interno dell'intervallo $[-L, L]$. Perchè si verifichi quanto detto è necessario scegliere un opportuno intervallo.

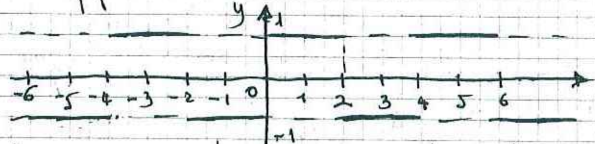
Esempio:

1) la funzione $y=\begin{cases} -1 & \text{per } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{per } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ 1)

e rappresentiamo tale funzione.

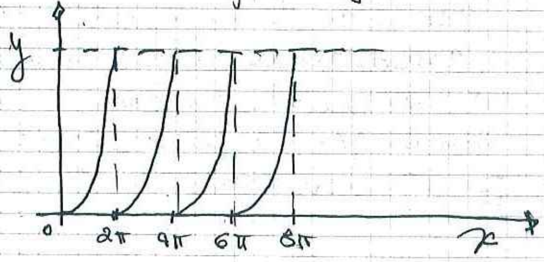


La suddetta funzione è periodica nell'intervallo $-2 \leq x \leq 2$ di periodo $2L=4$ e lo è anche fuori l'intervallo $[-2, 2]$ prolungandola opportunamente



quindi $f(x)$ risulta periodica di periodo $2L=4$ fuori dell'intervallo $[-2, 2]$.

2) Consideriamo la funzione $y=x^2$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$; essa non è periodica in detto intervallo ma lo è esternamente con periodo $2L=2\pi$; Consideriamo la funzione $y=x^2$ e il suo prolungamento



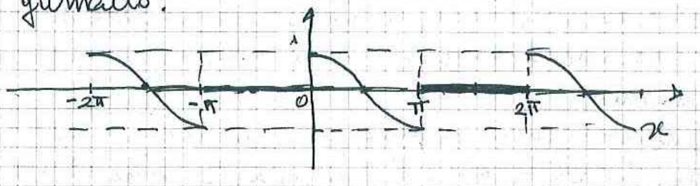
5

3) Consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{per } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{per } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Tale funzione non è periodica nell'intervallo $]0, 2\pi[$ ma lo è fuori detto intervallo e il suo periodo è $2L = 2\pi$.

Rappresentiamo la funzione data e il suo prolungamento:



4) Consideriamo la funzione $\operatorname{sen} x$ nell'intervallo $]0 < x < \pi[$.

Entro tale intervallo $]0 < x < \pi[$ la funzione $\operatorname{sen} x$ non è periodica ma si può rendere periodica esternamente all'intervallo in questione con un prolungamento

quindi $\operatorname{sen} x$ è sviluppabile entro l'intervallo $0 < x < \pi$.

Lo sviluppo in serie di Fourier è il seguente:

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\text{ove} \quad \left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, dx \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

con $n \in N$;

6

il termine a_0 viene determinato dalle (3) ponendo nella a_n, $n=0$.

Ripetiamo allora che, se sono soddisfatte le condizioni di sviluppabilità per la $f(x)$, la serie (2) è convergente nell'intervallo $[-L, L]$ per ogni punto di continuità.

Al fine di facilitare il calcolo di a_n e b_n è da tener presente che nello sviluppo di Fourier di una funzione $f(x)$ dispari mancheranno i termini in coseno mentre per una funzione $f(x)$ pari mancheranno i termini in seno.

Sviluppiamo in serie di Fourier la funzione $f(x) = \cos \alpha x$* con $0<\alpha<1$, periodica di periodo $2L = 2\pi$, (più precisamente sviluppiamo $f(x)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Calcoliamo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos \frac{0\pi x}{\pi}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha\pi}\Big[\operatorname{sen} \alpha x\Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\alpha\pi}.$$

Per il calcolo di a_n, b_n teniamo presente le formule:

$$\cos(\alpha x)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha x + nx) + \cos(\alpha x - nx)\right]$$

$$\cos(\alpha x)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha x + nx) - \operatorname{sen}(\alpha x - nx)\right]$$

e quindi

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(\alpha x + nx) + \cos(\alpha x - nx)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha x + nx)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha x - nx)\, dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right)\operatorname{sen}\alpha\pi\cos n\pi = 2\alpha\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\pi\cos n\pi}{\pi(\alpha^2-\pi^2)}$$

* La periodicità, ovviamente, si riferisce alla restrizione della funzione nell'intervallo $[-L, L]$ prolungata per continuità, con periodo $2L$, sulla retta reale.

4

Dato che $f(x) = \cos \alpha x$ è una funzione pari si trova:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\alpha x \,\mathrm{sen}\, nx \, dx = 0$$

e sostituendo, infine nello sviluppo 2) si ha:

$$f(x) = \cos \alpha x = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\alpha \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi \cos n\pi \cos nx}{\pi(\alpha^2 - n^2)} =$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi}{\alpha\pi} + 2\alpha \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi \cos\pi \cos x}{\pi(\alpha^2-1^2)} + 2\alpha \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi \cos 2\pi \cos 2x}{\pi(\alpha^2-2^2)} +$$

$$+ 2\alpha \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi \cos 3\pi \cos 3x}{\pi(\alpha^2-3^2)} + 2\alpha \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi \cos 4\pi \cos 4x}{\pi(\alpha^2-4^2)} + \dots =$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi}{\alpha\pi} - 2\alpha \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi \cos x}{\pi(\alpha^2-1^2)} + 2\alpha \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi \cos 2x}{\pi(\alpha^2-2^2)} +$$

$$- 2\alpha \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi \cos 3x}{\pi(\alpha^2-3^2)} + \dots =$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2}\cos x + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2}\cos 2x - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2}\cos 3x + \dots\right\} \quad (4)$$

o anche:

$$\cos\alpha x = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} + \dots\right\} \quad (4')$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$$ che risulta convergente per $0 < \alpha < 1$

e poniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$$

Se nel 2° integrale a 2° membro poniamo

$x = \frac{1}{y}$ si ricava

$dx = -\frac{dy}{y^2}$ e per

$x = 1 \rightarrow y = 1$

$x \rightarrow +\infty, \; y \rightarrow 0$

e sostiamo nello stesso si ottiene:

8

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_1^0\frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1+\frac{1}{y}}\left(-\frac{dy}{y^2}\right)=\int_0^1\frac{y^{-\alpha}}{1+y}dy$$

poichè la variabile è considerata muta possiamo scrivere:

$$\int_0^1\frac{y^{-\alpha}}{1+y}dy=\int_0^1\frac{x^{-\alpha}}{1+x}dx \quad \text{quindi}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_0^1\frac{x^{-\alpha}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}+x^{-\alpha}}{1+x}dx;$$

Per il calcolo di detto integrale sviluppiamo in serie di Mac Lauren $\frac{1}{1+x}$ e otteniamo:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots\dots+(-1)^n x^n+\dots=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$; sostituendo tale sviluppo nella funzione integranda dell'ultimo integrale si ha:

$$\frac{x^{\alpha-1}+x^{-\alpha}}{1+x}=(x^{\alpha-1}+x^{-\alpha})(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\dots\quad)=$$

$$=x^{\alpha-1}-x^{\alpha}+x^{\alpha+1}-x^{\alpha+2}+x^{\alpha+3}+\dots+x^{-\alpha}-x^{-\alpha+1}+x^{-\alpha+2}-x^{-\alpha+3}\dots$$

e integrando membro a membro

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}+x^{-\alpha}}{1+x}dx=\int_0^1(x^{\alpha-1}-x^{\alpha}+x^{\alpha+1}-x^{\alpha+2}+\dots+x^{-\alpha}-x^{-\alpha+1}\dots)dx=$$

$$=\left[\frac{x^{\alpha}}{\alpha}-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2}-\frac{x^{\alpha+3}}{\alpha+3}\dots+\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}+\frac{x^{-\alpha+3}}{-\alpha+3}\dots\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}-\frac{1}{\alpha+3}\dots+\frac{1}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+2}+\frac{1}{-\alpha+3}-\frac{1}{-\alpha+4}\dots=$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}\right)-\left(\frac{1}{2-\alpha}-\frac{1}{2+\alpha}\right)-\left(\frac{1}{3-\alpha}-\frac{1}{3+\alpha}\right)-\left(\frac{1}{4-\alpha}-\frac{1}{4+\alpha}\right)\dots=$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1+\alpha-1+\alpha}{1^2-\alpha^2}-\frac{2+\alpha-2+\alpha}{2^2-\alpha^2}+\frac{3+\alpha-3+\alpha}{3^2-\alpha^2}-\frac{4+\alpha-4+\alpha}{4^2-\alpha^2}-\dots=$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{2\alpha}{1^2-\alpha^2}-\frac{2\alpha}{2^2-\alpha^2}+\frac{2\alpha}{3^2-\alpha^2}-\frac{2\alpha}{4^2-\alpha^2}+\dots+(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}+\dots\ (5)$$

9

Se nella (4) poniamo $x=0$ si ricava:

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-4^2}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-5^2}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}+x^{-\alpha}}{1+x}dx \quad (6)$$

Riprendiamo la relazione (1) ossia:

$$B(1-n,n)=B(n,1-n)=\Gamma(n)\cdot\Gamma(1-n)$$

e calcoliamo

$$B(1-n,n)=B(n,1-n)=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-n}dx=\int_0^1\frac{x^n\cdot x^{-1}}{(1-x)^n}dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^n\frac{dx}{x} \quad \text{e posto } \frac{x}{1-x}=y \quad (*)$$

dato che per $x=0$ si ha $y=0$

$x=1$ si ha $y\to+\infty$

ricaviamo dalla (*) $x=\frac{y}{1+y}$ onde

$dx=\frac{dy}{(1+y)^2}$; l'integrale $\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^n\frac{dx}{x}$

diventa:

$$\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^n\frac{dx}{x}=\int_0^{+\infty}y^n\,\frac{1+y}{y}\,\frac{dy}{(1+y)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{y^{n-1}dy}{1+y}$$

e per la (6) si può scrivere:

$$\int_0^{+\infty}\frac{y^{n-1}}{1+y}dy=\lim_{y\to+\infty}\int^y\frac{y^{n-1}dy}{1+y}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi n} \quad \text{con } 0<n<1$$

e la (1) diventa: $\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi n}$ (7)

Prima di chiudere la presente monografia facciamo qualche applicazioni molto interessante.

1) Se nella (7) poniamo $n=\frac{1}{2}$ otteniamo:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}=\pi$$

da cui $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

10

2) Riprendiamo la relazione (4):

$$\cos\alpha x = \frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha\cos x}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha\cos 2x}{\alpha^2-2^2} - 2\alpha\frac{\cos 3x}{\alpha^2-3^2} + \cdots\right\}$$

moltiplicando ambo i membri per $\frac{\pi}{\operatorname{sen}\alpha\pi}$, trasportando $\frac{1}{\alpha}$ al 1° membro, sostituendo $x = \pi$ otteniamo:

$$8)\ F(\alpha) = \pi\operatorname{cotg}\alpha\pi - \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-4^2} + \cdots + \frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$$

ove $n \in N_0$.

Consideriamo il parametro α come variabile e integriamo ambo i membri della 8) tra 0 e x:

$$\int_0^x F(\alpha)\,d\alpha = \int_0^x \left(\pi\operatorname{cotg}\alpha\pi - \frac{1}{\alpha}\right)d\alpha = l_n\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} =$$

$$= \int_0^x \frac{2\alpha\,d\alpha}{\alpha^2-1^2} + \int_0^x \frac{2\alpha\,d\alpha}{\alpha^2-2^2} + \int_0^x \frac{2\alpha\,d\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots + \int_0^x \frac{2\alpha\,d\alpha}{\alpha^2-n^2}$$

con $n \in N_0$

Operando otteniamo:

$$l_n\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} = l_n\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right) + l_n\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right) + l_n\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right) +$$

$$+ \cdots + l_n\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) + \cdots =$$

$$= l_n\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdots;$$

da cui si ricava:

$$\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} = \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdots.$$

Se in questa uguaglianza (serie) poniamo $x = \frac{t}{\pi}$ si ottiene:

11

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \left(1-\frac{t^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$$

o, se vogliamo, tornando alla variabile x:

$$\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$$

e nel caso in cui fosse $x=\frac{\pi}{2}$ si avrebbe:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\pi^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{2^2\cdot 2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{3^2\pi^2 2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\pi^2}{n^2\pi^2 2^2}\right)\cdots$$

ossia

$$\frac{2}{\pi} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots\cdots\left[1-\frac{1}{(2n)^2}\right]\cdots =$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdots =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n}\cdots$$

e infine

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots(2n)(2n)}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdots(2n-1)(2n+1)}\cdots\cdots$$

un'uguaglianza che esprime il valore di π sotto forma di prodotto infinito ed è nota come formula di Wallis.

Concludiamo calcolando due integrali utilizzati nel precedente sviluppo:

$$1)\int_0^x\left(\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi-\frac{1}{\alpha}\right)d\alpha = \Big[l_n \operatorname{sen}\pi\alpha - l_n\alpha\Big]_0^x =$$

$$= l_n\operatorname{sen}\pi x - l_n x - \lim_{x,0} l_n \operatorname{sen}\pi x + \lim_{x,0} l_n x =$$

$$= l_n\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} - \lim_{x,0} l_n\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} = l_n\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} +$$

$$- l_n\lim_{x,0}\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} = l_n\frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} - l_n\pi = l_n\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}.$$

12

2) $\int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} d\alpha = \int_0^x \frac{-2\alpha\, d\alpha}{n^2 - \alpha^2} = \int_0^x \frac{-\frac{2\alpha}{n^2}}{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} d\alpha =$

$= \left[l_n \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right) \right]_0^x = l_n \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$

Peppe Ditta

GIUSEPPE DITTA